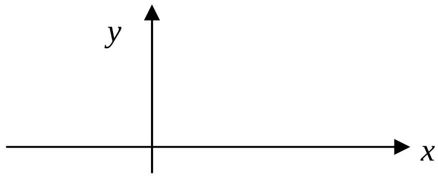
Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 2bis

1. Un punto materiale di massa m = 2.0 Kg si muove lungo l'asse X essendo soggetto ad una forza dipendente dalla posizione x secondo la legge: $F(x) = - Ax + B$, con A = 18 N/m e B = 9.0 N.
   a) Che tipo di moto compie il punto?
      ☐ rettilineo unifome ☐ uniformemente accelerato ☒ armonico
      Spiegazione sintetica della risposta: ………………………………………………………………
      L'accelerazione è $a(x) = F(x)/m$, cioè dipende da x e quindi il moto non può essere né uniforme né uniformemente accelerato; essendo $A>0$, l'equazione del moto è proprio quella del moto armonico
   b) Quanto vale la "posizione di equilibrio" x_{EQ} del punto? [La posizione di equilibrio è quella in cui, se il punto ci viene posto a **velocità nulla**, rimane fermo, cioè...]
      x_{EQ} =…………………………...... = ... m B/A = 0.50 m [è la posizione per cui $F(x_{EQ}) = 0$]
   c) Sapendo che all'istante t' = 0.52 s il punto si trova nella posizione x' = - 1.5 m con una velocità v' = 0 (in questo istante è fermo!), quanto vale la velocità v'' all'istante t'' = 1.0 s? [Per la soluzione può farvi comodo notare che 0.52 ~ π/6 , mentre 1.0 ~ π/3 , e che, per un angolo δ generico valgono le relazioni trigonometriche $cos(\pi/2 + \delta) = - sin\delta$ e $sin(\pi/2 + \delta) = cos\delta$. Fate attenzione alla risposta che avete dato al punto a) e tenete conto della risposta al punto b)!]
      v'' = ……………………………… = ... m/s $(A/m)^{1/2}(x_{EQ} - x')$ = 6.0 m/s [il moto è armonico con pulsazione $\omega = (A/m)^{1/2}$ = 3.0 rad/s; la legge oraria del moto generica per l'accelerazione considerata, come si ottiene risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine, è $x(t) = \alpha cos(\omega t + \delta) + x_P$, con x_P "soluzione particolare" dell'equazione differenziale. Si può porre $x_P = x_{EQ}$, soluzione costante che risolve l'equazione differenziale. Le condizioni del testo, riferite all'istante t', permettono di determinare le due costanti dimensionate α e δ; in particolare si ha: $x' = x(t') = = \alpha cos(\omega t' + \delta) + x_P = \alpha cos(\pi/2 + \delta) + x_P$ e $v' = v(t') = - \omega\, \alpha sin(\omega t' + \delta) = - \omega\, \alpha sin(\pi/2 + \delta)$, da cui δ = 0 e $\alpha = x_{EQ} - x'$ = 2.0 m. La risposta si ottiene quindi calcolando il valore $v'' = v(t'')$]

2. Un amico di Jules Verne scava un sottile tunnel da parte a parte della Terra lungo un suo diametro. Supponete la Terra come una sfera uniforme ed omogenea, di raggio R_T e densità ρ , ed immaginate che il tunnel scavato sia così sottile da non perturbare la simmetria sferica del sistema. L'amico lascia cadere nel tunnel un corpo puntiforme di massa m, con una velocità iniziale nulla.
   a) Indicando con x la distanza dal centro della terra, con tanto di segno (cioè $x = R_T$ all'inizio, $x = -R_T$ se il corpo puntiforme raggiunge il punto diametralmente opposto a quello di partenza), e detta a l'accelerazione del corpo lungo questo asse, come si scrive l'equazione del moto in funzione di x? [Indicate con G la costante di gravitazione universale e supponete che non ci sia alcun altra forza, per esempio attrito, oltre a quella di attrazione gravitazionale]
      $a(x)$ = ……………………………… $F_G/m = - (G/x^2)(\rho(4/3)\pi x^3) = - ((4/3)G\,\pi\,\rho)\, x$ [notate che si tratta dell'equazione per un moto armonico con pulsazione $\omega = ((4/3)G\,\pi\,\rho)^{1/2}$]
   b) Supponendo che il corpo puntiforme venga lasciato andare nel tunnel all'istante t_0 = 0, a quale istante t' esso raggiungerà il centro della terra? [Supponendo che lo raggiunga, altrimenti date una spiegazione del fatto che questo non si può verificare]
      t' = ……………………………… $T/4$, con $T = (2\pi/4) / ((4/3)G\,\pi\,\rho)^{1/2}$ [come affermato sopra, si tratta di un moto armonico di ampiezza massima pari a R_T che avviene attorno al centro della terra $(x = 0)$ con pulsazione ω determinata sopra; dopo un quarto di periodo il corpo passa per il centro dell'oscillazione]
   c) Cosa fa il corpo dopo aver raggiunto il centro della terra? [Sempre ammesso che ci arrivi...]
      …………………………………………………… Continua a muoversi verso il punto diametralmente opposto a quello di partenza, che raggiunge e poi torna indietro; non essendoci attriti, il moto di oscillazione dura continuamente!

3. Una carica puntiforme di valore $Q = 1.0\text{x}10^{-10}$ C (uso il simbolo C per indicare l'unità di misura Coulomb) e massa m = 10 g si muove senza attrito su un piano orizzontale XY. Si riscontra che le leggi orarie del moto per le due coordinate sono: $x(t) = At^2$ e $y(t) = Bt$, con A = 2.0 m/s^2 e B = 3.5 m/s.

a) Disegnate approssimativamente la traiettoria della carica nel piano XY e scrivete la funzione $y(x)$ che la rappresenta analiticamente:



$y(x)$ = ... $(B/A^{1/2})\ x^{1/2}$
[potete riconoscere facilmente che la funzione $x(y)$ è, per $t>0$, un ramo di parabola centrato nell'origine. Da questa considerazione potete facilmente determinare il grafico della traiettoria $y(x)$]

b) Sapendo che l'**unica** causa fisica del moto della carica è un campo elettrico $\mathbf{E}(x,y,t)$ presente in tutti i punti dello spazio (ed eventualmente dipendente da posizione e tempo), quanto valgono le componenti di questo campo, E_X ed E_Y? [Esprimetene il valore nell'unità di misura N/C]
E_X = ... = ... N/C $\quad F_X/Q = ma_x / Q = m\,2A / Q = 4.0\times10^8$ N/C
E_Y = ... = ... N/C $\quad F_Y/Q = ma_Y / Q = 0$ [si ottengono in modo molto diretto notando che il moto lungo X è uniformemente accelerato, con accelerazione pari a $2\,A$, e quindi forza pari a $2\,A\,m$, e quindi campo pari a $2\,A\,m / Q$; lungo Y, invece, il moto è rettilineo uniforme e non c'è forza!]

c) In quale posizione $x_0\ y_0$ si trova la carica all'istante $t = 0$, e quanto vale la sua velocità $v_{0X}\ v_{0Y}$ allo stesso istante?
x_0 = ... = ... m 0 $\quad y_0$ = ... = ... m 0
v_{0X} = ... = ... m/s 0 $\quad v_{0Y}$ = ... = ... m/s B = 3.5 m/s
[si ottiene dalle leggi orarie del moto e dalle considerazioni già fatte sul tipo di moto]

4. Una sfera disomogenea di raggio $R = 5.0$ cm è fatta di un materiale la cui densità di massa varia con la distanza dal centro r secondo la legge $\rho(r) = \rho_0\, R^2 / r^2$, con $\rho_0 = 1.0\times10^3$ Kg/m^3. [Notate che fisicamente è un po' improbabile avere una densità che diventa enorme in prossimità del centro, come per il sistema considerato, però ci sono dei casi in cui si può verificare qualcosa di simile]
   a) Quanto vale la massa m della sfera? [Ricordate la definizione di densità di massa nel caso disomogeneo, tenete conto della simmetria sferica del sistema, e ricordatevi di suddividere la sfera stessa in tanti gusci sferici concentrici; credetemi: l'integrale che dovete calcolare non presenta alcuna difficoltà!]
   m = …………………………….. = ... Kg $\quad \int_0^R \rho\, 4\pi\, r^2\, dr = \rho_0\, 4\pi\, R^2 \int_0^R (r^2/r^2)\, dr = \rho_0\, 4\pi\, R^2 \int_0^R dr = \rho_0\, 4\pi\, R^3 = 1.6$ Kg
   b) Se la sfera viene immersa in acqua (densità $\rho_A = \rho_0 = 1.0\times10^3$ Kg/m^3) galleggia o va a fondo? Motivate la risposta:
   .... per galleggiare deve ricevere una spinta maggiore della forza peso mg; la spinta di Archimede massima che può ricevere essendo immersa in acqua vale $\rho_A V g$, dove $V = (4/3)\pi R^3$ è il suo volume; si vede che questo non si verifica e quindi la sfera va a fondo

5. In seguito ad un processo di sedimentazione, un liquido versato in un cilindro graduato presenta una densità di massa disomogenea (la frazione più densa va a fondo). Usando un asse di riferimento Z centrato sul pelo del liquido e orientato verso il basso, la densità di massa del liquido si scrive $\rho(z) = \rho_0\, z/L$, dove L è l'altezza della colonna di liquido. Disponete ora di un sottile cilindro omogeneo di massa m e sezione di base di area S: lo immergete lentamente nel liquido mantenendolo con l'asse verticale ed osservate che esso galleggia quando la parte immersa è lunga h. [Supponete che la sezione del cilindro sia così piccola da rendere trascurabile la variazione di quota del pelo del liquido]
   a) Quanto vale h in funzionde dei dati del problema? [State attenti a valutare bene il peso del volume di liquido spostato: dato che la densità è disomogenea lungo Z dovrete fare un'integrazione in questa direzione tenendo conto per benino degli estremi di integrazione. Vi può far comodo ricordare che, per una variabile generica ξ si ha $\int \xi\, d\xi = \xi^2/2$]
   h = ……………………………….......... $(2mL/(S\rho_0))^{1/2}$ [infatti il peso del volume di liquido spostato, cioè la spinta di Archimede, vale, avendo scelto il sistema di riferimento come suggerito: $g \int_{VOL} \rho\, dV = g \int_0^h \rho(z)\, S\, dz = g\, \rho_0\, (S/L) \int_0^h z\, dz = g\, \rho_0\, (S/L)\, h^2/2$,dove abbiamo indicato con dV l'elemento di volume rilevante per l'esercizio: $dV = S\, dz$. Uguagliando la spinta di Archimede alla forza peso che agisce sul cilindro, mg, si ottiene la risposta]