

Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 10

1. Avete tre masse puntiformi, $m_1 = 1.25 \text{ Kg}$, $m_2 = 750 \text{ g}$, $m_3 = 250 \text{ g}$, che si trovano nelle seguenti posizioni spaziali (espresse vettorialmente e riferite ad un dato sistema cartesiano): $\mathbf{r}_1 = (-20, 40, -40) \text{ cm}$; $\mathbf{r}_2 = (20, 0, -40) \text{ cm}$; $\mathbf{r}_3 = (40, 20, 0) \text{ cm}$.
 - a) Qual è, vettorialmente, la posizione del centro di massa \mathbf{r}_{CM} ?
 $\mathbf{r}_{CM} = (\dots\dots\dots) \text{ m}$
 - b) Quanto vale il **momento di inerzia** I per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse Z del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
 $I = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ Kg m}^2$
 - c) Quanto vale il **momento di inerzia** I' per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse Z ma passante **per la massa** m_1 ?
 $I' = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ Kg m}^2$
2. Avete una barretta sottile di materiale disomogeneo, di sezione S , lunghezza totale l e densità di massa $\rho(x)$ che varia lungo l'asse secondo la legge $\rho(x) = \alpha x^2$, dove x è la distanza da un estremo e α è una costante opportunamente dimensionata in modo che $\rho(x)$ si misuri in Kg/m^3 (α si deve evidentemente misurare in Kg/m^5).
 - a) Tenendo conto che la densità dipende **solo** da x , come potete esprimere una **densità lineare di massa** $\lambda(x)$, con dimensioni di una massa per unità di lunghezza (Kg/m)?
 $\lambda(x) = \dots\dots\dots$
 - b) Quanto vale la massa m della barretta?
 $m = \dots\dots\dots$
 - c) Qual è la coordinata x_{CM} del centro di massa? (Supponete di disporre la barretta lungo l'asse X di un sistema di riferimento cartesiano, con la sua origine coincidente con l'origine del sistema)
 $x_{CM} = \dots\dots\dots$
 - d) Quanto vale il **momento di inerzia** I per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse Z del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
 $I = \dots\dots\dots$
 - e) Quanto vale il **momento di inerzia** I_{CM} per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse Z ma passante **per il centro di massa**?
 $I_{CM} = \dots\dots\dots$
 - f) Provate a “generalizzare” il risultato precedente, cioè a trovare un legame tra I ed I_{CM} che coinvolga la massa del corpo, m , e la distanza D tra l'asse a cui si riferisce il momento di inerzia I e il centro di massa:
 $I = \dots\dots\dots$
3. Avete un sottile anello circolare fatto di un materiale **omogeneo** con densità di massa ρ (in questo caso è ovviamente uniforme). Indicate con r il raggio dell'anello, con Δr la sua “larghezza” (cioè il suo spessore in direzione radiale) e con Δs la sua “altezza” (cioè il suo spessore in direzione assiale).
 - a) Quanto vale, in prima approssimazione, il volume ΔV dell'anello?
 $\Delta V \sim \dots\dots\dots$
 - b) Quanto vale, in prima approssimazione, la massa Δm dell'anello?
 $\Delta m \sim \dots\dots\dots$
 - c) Supponete ora di avere tanti di questi **anelli**, di raggio variabile tra $r = 0$ ed $r = R$, tutti di spessore Δr **molto** piccolo, ed immaginate di infilarli tutti uno dentro l'altro in modo che i loro centri

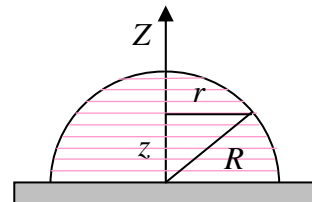
coincidano. Il risultato della vostra operazione immaginaria sarà la costruzione di un **disco** omogeneo di raggio R . Quanto vale la massa $\Delta m'$ di questo disco?

$\Delta m' = \dots\dots\dots$

d) Quanto vale il momento di inerzia ΔI di questo disco per una rotazione attorno al suo asse?

$\Delta I = \dots\dots\dots$

e) A questo punto, supponete di avere tanti di questi **dischi**, di raggio variabile tra $r = 0$ ed $r = R$, tutti di spessore Δs **molto** piccolo, ed immaginate di impilare dischi di raggio via via decrescente tutti uno sopra l'altro in modo che i loro centri coincidano. Il risultato della vostra operazione immaginaria sarà la costruzione di una **semisfera** omogenea di raggio R . Se dal punto di vista operativo decidete di impilare i dischi lungo l'asse Z , partendo, con il disco di raggio R , dal piano $z = 0$, qual è la relazione (puramente geometrica) tra raggio $r(z)$ del disco e quota z a cui questo disco si trova (vedi figura)?



$r(z) = \dots\dots\dots$

f) Quanto vale la massa $\Delta m''$ di questa semisfera?

$\Delta m'' = \dots\dots\dots$

g) E ora che siamo “esperti” di calcolo di integrali di volume, quanto vale il momento di inerzia I per la semisfera in rotazione attorno all'asse Z ?

$I = \dots\dots\dots$

h) Ragionando come sopra, quanto vale la coordinata z_{CM} del centro di massa?

$z_{CM} = \dots\dots\dots$