Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 10

1. Avete tre masse puntiformi, m_1 = 1.25 Kg, m_2 = 750 g, m_3 = 250 g, che si trovano nelle seguenti posizioni spaziali (espresse vettorialmente e riferite ad un dato sistema cartesiano): $\boldsymbol{r_1}$ = (- 20, 40, - 40) cm; $\boldsymbol{r_2}$ = (20, 0, -40) cm; $\boldsymbol{r_3}$ = (40, 20, 0) cm.
   a) Qual è, vettorialmente, la posizione del centro di massa $\boldsymbol{r_{CM}}$?
   $\boldsymbol{r_{CM}}$ = (……….,…….,……..) m $\Sigma_i m_i \boldsymbol{r_i} / (\Sigma_i m_i)$ = (0, 0.24, - 0.35) m

   b) Quanto vale il **momento di inerzia** I per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse Z del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
   I = ………………………………... = …….. Kg m^2 $\Sigma_i m_i \rho_i^2$ = 0.33 Kg m^2 , dove ρ_i è la distanza **geometrica** tra le masse e l'asse di rotazione, cioè calcolata considerando le sole componenti sul piano XY ortogonale all'asse Z

   c) Quanto vale il **momento di inerzia** I' per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse Z ma passante **per la massa** m_1?
   I' = ………………………………... = …….. Kg m^2 $\Sigma_i m_i \rho_i^2$ = 0.34 Kg m^2 , dove ρ_i è la distanza **geometrica** tra le masse (solo le masse m_2 ed m_3!) e l'asse di rotazione

2. Avete una barretta sottile di materiale disomogeneo, di sezione S , lunghezza totale l e densità di massa $\rho(x)$ che varia lungo l'asse secondo la legge $\rho(x) = \alpha x^2$, dove x è la distanza da un estremo e α è una costante opportunamente dimensionata in modo che $\rho(x)$ si misuri in Kg/m^3 (α si deve evidentemente misurare in Kg/m^5).
   a) Tenendo conto che la densità dipende **solo** da x, come potete esprimere una **densità lineare di massa** $\lambda(x)$, con dimensioni di una massa per unità di lunghezza (Kg/m)?
   $\lambda(x)$ = ………………………… $\rho(x) S = (\alpha S) x^2$ [notate che questo passaggio, cioè la definizione di una densità lineare di massa, è utilissimo per rendere il problema praticamente unidimensionale, come vedremo in seguito]

   b) Quanto vale la massa m della barretta?
   m = ………………………… $\int\lambda(x)\, dx = (\alpha S) \int x^2\, dx = (\alpha S)(l^3/3)$ [ricordate che la "primitiva" di x^n è $x^{n+1}/(n + 1)$, e che l'integrale va esteso tra 0 e l]

   c) Qual è la coordinata x_{CM} del centro di massa? (Supponete di disporre la barretta lungo l'asse X di un sistema di riferimento cartesiano, con la sua origine coincidente con l'origine del sistema)
   x_{CM} = ………………………… $(\int\lambda(x)\, x\, dx)/m = (\alpha S/m) \int x^3\, dx = (\alpha S/m)\, (l^4/4) = (3/4)\, l$

   d) Quanto vale il **momento di inerzia** I per una rotazione rispetto ad un asse coincidente con l'asse Z del sistema di riferimento assegnato (e quindi passante **per l'origine** del riferimento)?
   I = …………………………… $\int\lambda(x)\, x^2\, dx = (\alpha S) \int x^4\, dx = (\alpha S)\, (l^5/5)$

   e) Quanto vale il **momento di inerzia** I_{CM} per una rotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse Z ma passante **per il centro di massa**?
   I_{CM} = …………………………… $\int\lambda(x)\, (x - x_{CM})^2\, dx = \int\lambda(x)\, (x - x_{CM})^2\, dx = (\alpha S) \{\int x^2\, (x - 3\, l / 4)^2\, dx\} = (\alpha S) \{\int x^2\, (x^2 - 3\, l\, x / 2 + 9\, l^2 / 16)\, dx\} = (\alpha S) \{\int x^4\, dx - (3\, l / 2) \int x^3\, dx + (9\, l^2 / 16) \int x^2\, dx\} = I - (3\, l / 2)\, m\, x_{CM} + (9\, l^2 / 16)\, m = I + m\, (- (9\, l^2 / 8) + (9\, l^2 / 16)) = I - (9 / 16) m\, l^2$

   f) Provate a "generalizzare" il risultato precedente, cioè a trovare un legame tra I ed I_{CM} che coinvolga la massa del corpo, m, e la distanza D tra l'asse a cui si riferisce il momento di inerzia I e il centro di massa:
   I = …………………………… $I_{CM} + m\, D^2$, dove D nel nostro caso (per la nostra scelta del sistema di riferimento), coincide con x_{CM}; talvolta si dà il nome di teorema di Huygens-Steiner, o "degli assi paralleli", ad una relazione simile a quella trovata

3. Avete un sottile anello circolare fatto di un materiale **omogeneo** con densità di massa ρ (in questo caso è ovviamente uniforme). Indicate con r il raggio dell'anello, con Δr la sua "larghezza" (cioè il suo spessore in direzione radiale) e con Δs la sua "altezza" (cioè il suo spessore in direzione assiale).

   a) Quanto vale, in prima approssimazione, il volume ΔV dell'anello?

   $\Delta V \sim$ ………………………… $2\pi\, r\, \Delta s\, \Delta r$ [notate che abbiamo supposto di "stendere" l'anello, ottenendo una sorta di prisma la cui base ha lunghezza $2\pi\, r$ e larghezza Δr, e la cui altezza è Δs. **Approssimativamente**, il suo volume sarà superficie di base per altezza, da cui il risultato]

   b) Quanto vale, in prima approssimazione, la massa Δm dell'anello?

   $\Delta m \sim$ ………………………… $\rho\, \Delta V = \rho\, 2\pi\, r\, \Delta s\, \Delta r$

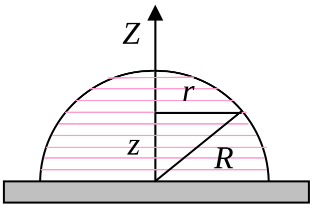
   c) Supponete ora di avere tanti di questi **anelli**, di raggio variabile tra $r = 0$ ed $r = R$, tutti di spessore Δr **molto** piccolo, ed immaginate di infilarli tutti uno dentro l'altro in modo che i loro centri coincidano. Il risultato della vostra operazione immaginaria sarà la costruzione di un **disco** omogeneo di raggio R. Quanto vale la massa $\Delta m'$ di questo disco?

   $\Delta m' =$ ………………………… $\Sigma\ \Delta m \rightarrow \int dm = \int \rho\, 2\pi\, r\ \Delta s\, dr = \rho\, 2\pi\ \Delta s\, (R^2/2)$, dove abbiamo sostituito la somma con un integrale per tenere conto della natura "continua" e non "discreta" del sistema, e dm rappresenta l'elemento infinitesimo di massa che si ottiene immaginando di far tendere a zero lo spessore degli anelli (è, ovviamente, $dm = \rho\, 2\pi\, r\, \Delta s\, dr$, con dr elemento infinitesimo di spessore, e l'integrale va calcolato tra $r = 0$ ed $r = R$). Notate che il valore determinato equivale al prodotto di densità per volume del disco, come deve essere!

   d) Quanto vale il momento di inerzia ΔI di questo disco per una rotazione attorno al suo asse?

   $\Delta I =$ ………………………… $\Sigma\ \Delta m\ r^2 \rightarrow \int r^2\ dm = \int \rho\, 2\pi\, r^3\ \Delta s\, dr = \rho\, 2\pi\ \Delta s\, (R^4/4)$ [dove abbiamo operato in modo simile a quanto fatto per la risposta al punto precedente]

   e) A questo punto, supponete di avere tanti di questi **dischi**, di raggio variabile tra $r = 0$ ed $r = R$, tutti di spessore Δs **molto** piccolo, ed immaginate di impilare dischi di raggio via via decrescente tutti uno sopra l'altro in modo che i loro centri coincidano. Il risultato della vostra operazione immaginaria sarà la costruzione di una **semisfera** omogenea di raggio R. Se dal punto di vista operativo decidete di impilare i dischi lungo l'asse Z, partendo, con il disco di raggio R, dal piano $z = 0$, qual è la relazione (puramente geometrica) tra raggio $r(z)$ del disco e quota z a cui questo disco si trova (vedi figura)?



   $r(z) =$ ………………………… $(R^2 - z^2)^{1/2}$ [viene dal teorema di Pitagora]

   f) Quanto vale la massa $\Delta m''$ di questa semisfera?

   $\Delta m'' =$ ………………………… $\Sigma\, \Delta m' \rightarrow \int dm' = \int \rho\, 2\pi\, (r^2/2)\, dz = \int \rho\, \pi\ (R^2 - z^2)\, dz = \rho\, \pi\, R^2 \int dz - \rho\, \pi \int z^2\, dz = \rho\, \pi\, (R^3 - R^3/3) = (2/3)\, \rho\, \pi\, R^3$, dove abbiamo ragionato come sopra ed impiegato il risultato del punto precedente per calcolare l'integrale, che va esteso tra $z = 0$ e $z = R$; riconoscete nel risultato l'espressione del volume della semisfera (metà del volume di una sfera)!

   g) E ora che siamo "esperti" di calcolo di integrali di volume, quanto vale il momento di inerzia I per la semisfera in rotazione attorno all'asse Z?

   $I =$ ………………………….. $\int r^2\ dm' = \int\ r^2\, \rho\, 2\pi\, (r^2/2)\, dz = \int \rho\, \pi\ (R^2 - z^2)^2\, dz = \ldots = (8/15)\, \rho\, \pi\, R^5$, dove abbiamo ragionato come sopra ed impiegato il risultato del punto precedente per calcolare l'integrale, che va esteso tra $z = 0$ e $z = R$

   h) Ragionando come sopra, quanto vale la coordinata z_{CM} del centro di massa?

   $z_{CM} =$ ………………………….. $\int z\, dm' = \int\ z\, \rho\, 2\pi\, (r^2/2)\, dz = \int z\, \rho\, \pi\ (R^2 - z^2)\, dz = \ldots = (1/4)\, \rho\, \pi\, R^4 / m = 3R/8$, dove per l'ultimo passaggio abbiamo espresso la massa m della semisfera in funzione di ρ