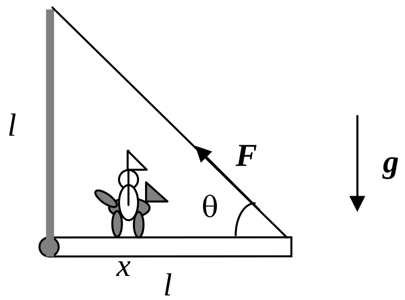
Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 13/06

1. Un cavaliere medievale, di massa complessiva M = 500 Kg, percorre un ponte levatoio, di materiale omogeneo, lunghezza l = 5.00 m, e massa m = 100 Kg, che è incernierato senza attriti ad un suo estremo, mentre all'altro estremo è fissato tramite una catena inestensibile (di massa trascurabile) alle pareti del castello, in un punto che si trova ad una distanza verticale l = 5.00 m al di sopra del perno (vedi figura). Per lo svolgimento del problema, considerate il cavaliere (con cavallo e armatura) come un punto materiale.



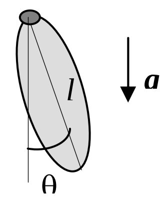
   a) Detta x la coordinata del cavaliere lungo il ponte levatoio, come si scrive la funzione $F(x)$ che rappresenta la dipendenza del modulo della tensione della catena con la posizione x?
   $F(x)$ = ……………………………………….. $(Mg\ x + mgl/2)/(l \sin\theta)$, essendo θ = 45 gradi l'angolo rappresentato in figura

   b) Sapendo che il carico massimo che la catena può sopportare prima di spezzarsi vale in modulo F' = 5000 N,quanto vale la coordinata x' a cui arriva il cavaliere prima che succeda il disastro?
   x' = …………………………………... = ……… m $F'l \sin\theta / (Mg) - ml / (2M)$ = 3.11 m
   [risolvendo l'equazione scritta sopra per x e considerando una forza pari a F']

   c) Tenendo conto che il ponte levatoio è ben approssimato da un'asta omogenea che ruota attorno ad un asse passante per una sua estremità, quanto vale **l'accelerazione angolare** α del ponte subito dopo la rottura della catena? [Se proprio non volete calcolarvelo, ricordate che il momento di inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l vale, in questo caso, $I = ml^2/3$]
   α = …………………………………... = ……… rad/s^2 $(mgl/2 + Mgx')/I$ = 21.2 rad/s^2
   [dalla legge del moto di rotazione di un corpo rigido, tenendo conto che, subito dopo la rottura della catena, i momenti delle forze sono solo quelli dovuti alla forza peso del ponte, applicata al suo centro di massa, e del cavaliere, applicata con un braccio pari a x']

   d) Il cavaliere comincerà a cadere verso il basso, ed il ponte a compiere una rotazione. Inizialmente (subito dopo la rottura della catena), quanto valgono in modulo le **accelerazioni lineari** A ed a rispettivamente del cavaliere e dell'estremità del ponte?
   A = …………………………………... = ……… m/s^2 g = 9.80 m/s^2 [è un grave in caduta libera!]
   a = …………………………………... = ……… m/s^2 $\alpha\ l$ = 106 m/s^2 [>> g !!]

2. Un ellissoide omogeneo di massa m e lunghezza l (vedi figura) può ruotare su un piano verticale attorno ad un perno passante per una sua estremità. Si suppongano trascurabili tutti gli attriti e si assuma pari ad I (noto!) il momento di inerzia.



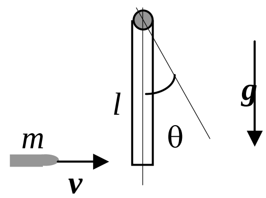
   a) A quale distanza d dal perno (misurata lungo l'asse dell'ellissoide disegnato in figura) si trova il centro di massa dell'ellissoide?.
   d = …………………………………..…….. l / 2, per l'omogeneità e simmetria

   b) Quanto vale, in funzione dell'angolo θ indicato in figura, il momento τ esercitato dalla forza peso rispetto al perno di rotazione?
   τ = …………………………………….. $m\ g\ (l/2) \sin\theta$ [la forza perso è applicata al centro di massa!]

   c) Quanto vale, sempre in funzione di θ, l'accelerazione angolare α dell'ellissoide? [segni!!!]
   α = …………………………………..…….. $-\ \tau / I = -\ m\ g\ (l/2\ I) \sin\theta$

   d) Se l'ellissoide viene spostato "di poco" dalla posizione di equilibrio stabile θ = 0, si osservano delle oscillazioni (è un pendolo che fa piccole oscillazioni!!). Quanto vale la loro pulsazione ω_{PO}?
   ω_{PO} = …………………………………..…….. $(m\ g\ (l/2\ I))^{1/2}$ [ragionate per analogia con il caso di un pendolo costituito da una massa puntiforme m legata ad una corda lunga d che fa piccole oscillazioni…]

3. Un'asta omogenea di massa M = 1.0 Kg e lunghezza l = 0.50 m è sospesa ad un perno collocato ad una sua estremità. L'asta può ruotare **senza attriti** attorno al perno, mantenendosi su un piano verticale. Un proiettile di massa m = 5.0 g e velocità (orizzontale) v = 200 m/s colpisce l'estremità dell'asta, come in figura, rimanendoci conficcato, quando l'asta stessa si trova **ferma** in posizione di equilibrio (cioè è disposta lungo un asse verticale, θ = 0 – vedi figura).



Francesco Fuso – tel 050 2214305 – e-mail: fuso@df.unipi.it – web page: http://www.df.unipi.it/~fuso/dida

a) Quanto vale in modulo il momento angolare L_P del proiettile calcolato rispetto al perno di rotazione dell'asta nell'istante in cui il proiettile colpisce l'asta? [Suggerimento: ricordate la definizione di momento angolare rispetto ad un punto, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, con $\boldsymbol{r}$ vettore che congiunge il proiettile al perno di rotazione, e $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ quantità di moto del proiettile]
L_P = ……………………………….. = …….. Kg m^2/s mvl = 0.50 Kg m^2/s

b) Sfruttando la conservazione del momento angolare, dovuta all'assenza di momenti delle forze esterni al sistema proiettile+asta, e sapendo che il momento di inerzia dell'asta è in questo caso $I = Ml^2/3$, quanto vale la velocità angolare ω_0 con cui l'asta avvia la sua rotazione subito dopo l'urto? [Attenzione: il proiettile rimane conficcato nell'asta, e quindi anch'esso ha un suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, benché molto piccolo]
ω_0 = ……………………………….. ~ …….. rad/s $L_P / (I + ml^2)$ ~ 5.9 rad/s

c) L'asta comincia quindi a ruotare in senso antiorario, cioè l'angolo θ di figura tende ad aumentare. Quanto vale, in funzione di θ, il lavoro Λ fatto dalla forza peso che agisce sul centro di massa dell'asta? [Semplificazione: trascurate il lavoro della forza peso sul movimento del proiettile conficcato nell'asta – vi garantisco che l'approssimazione è ragionevole!]
Λ = ……………………………..…….. $Mgl\,(1 - \cos\theta)$

d) Quanto vale l'angolo massimo θ_{MAX} raggiunto dall'asta prima di arrestarsi?
θ_{MAX} = ……………………………~ …….. gradi $\arccos(1 - (I + ml^2)\,\omega_0^2 / (2Mgl))$
[uguagliando il lavoro della forza peso con l'energia cinetica iniziale dell'asta – se pensate di risolvere l'esercizio "alla rovescia", cioè a partire dalla misura di θ_{MAX}, vi potete rendere conto che questo sistema può servire per misurare indirettamente la velocità del proiettile]

4. Una pattinatrice artistica su ghiaccio, che ha massa m = 50 Kg, fa una veloce piroetta in senso antiorario. Si trascuri l'attrito tra i pattini ed il ghiaccio.

a) Nella configurazione iniziale, la pattinatrice tiene le braccia lungo il corpo ed il suo corpo può essere approssimato (con molta fantasia!) con un cilindro verticale **omogeneo**, di altezza h e raggio R = 0.2 m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Quanto vale il momento di inerzia I della pattinatrice in queste condizioni?
I = ………………………………... = ……… Kg m^2 $m\,R^2 / 2$ = 1.0 Kg m^2 [è un cilindro che ruota attorno al suo asse!]

b) Sapendo che la pattinatrice compie f = 8.0 rotazioni al secondo, quanto valgono il modulo del suo momento angolare L e la sua energia cinetica E_K?
L = …………………………………... ~ ……… Kg m^2/s $I\,\omega = I\,2\pi f$ ~ 50 Kg m^2/s
E_K = ………………………………... ~ ……… J $I\,\omega^2/2 = I\,(2\pi f)^2/2$ ~ 1262 J

c) Mentre sta ruotando, la pattinatrice allarga le braccia fino a disporle in direzione orizzontale. In questa nuova configurazione, essa può essere approssimata come un cilindro verticale omogeneo di massa m_C = 45 Kg in rotazione, che rappresenta come prima il suo corpo; le braccia tese, in vece, possono essere rappresentate come un'asta **omogenea** orizzontale, di massa m_B = 5.0 Kg e lunghezza d = 1.6 m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo punto medio. A questo punto, quindi, il sistema (di massa complessiva m) è costituito da due elementi omogenei, il cilindro verticale e l'asta orizzontale, che ruotano solidali attorno allo stesso asse. Il momento di inerzia complessivo I' può essere quindi determinato sommando i momenti di inerzia del cilindro e dell'asta. Quanto vale I'?
I' = …………………………………... ~ ……… Kg m^2 $m_C\,R^2 / 2 + m_B\,d^2 / 12$ ~ 2.0 Kg m^2
[ricordate l'espressione del momento di inerzia per un'asta che ruota attorno al suo punto medio!]

d) Considerando come istante iniziale del processo quello in cui la pattinatrice piroetta a braccia lungo il corpo e come istante finale quello in cui ha le braccia orizzontali, cosa si può affermare si conservi durante il processo?
X Il momento angolare L'energia cinetica Entrambe Nulla
Spiegazione sintetica della risposta: ……………………………………………… non agiscono momenti di forza esterni al "sistema" pattinatrice, e quindi il momento angolare si conserva

e) Quanto vale la frequenza di rotazione f' al termine del processo?
f' = …………………………………... ~ ……… rotazioni al secondo $f\;I\;/\;I'$ ~ 4.0 rot/s
[dalla conservazione del momento angolare!]