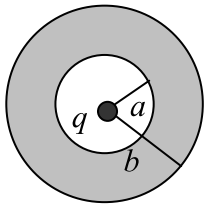
Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 22/06



1. Una carica puntiforme q si trova al centro di una cavità sferica vuota ricavata all'interno di una sfera conduttrice; la cavità ha raggio a e la sfera ha raggio b, ed esse sono concentriche (vedi figura). Il sistema è in equilibrio

a) Supponendo che la sfera conduttrice cava sia **scarica**, cioè che non porti alcuna carica, quanto vale il campo elettrico $E(r)$ (modulo) nelle tre regioni $r<a$, $a<r<b$, $r>b$?

$E(r)$ = ………………………………….. $r<a$ $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ [carica puntiforme nell'origine!]

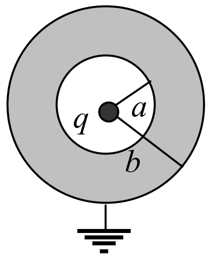
$E(r)$ = ………………………………….. $a<r<b$ 0 [conduttore in equilibrio]

$E(r)$ = ………………………………….. $r>b$ $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ [Gauss su una superficie sferica, tenendo conto che la carica contenuta nella superficie è q – la sfera cava è scarica!]

b) Quanto valgono le cariche q_a e q_b rispettivamente sulla superficie della cavità ($r=a$) e sulla superficie della sfera ($r=b$)?

q_a = ………………………………….. $-q$ [basta applicare Gauss ad una superficie sferica di raggio compreso tra a e b , dove il campo è nullo, e notare che la carica contenuta al suo interno, che deve essere nulla, è data dalla somma algebrica $q+q_a$]

q_b = ………………………………….. q [la sfera deve essere globalmente scarica, per cui $q_a+q_b=0$, da cui il risultato]



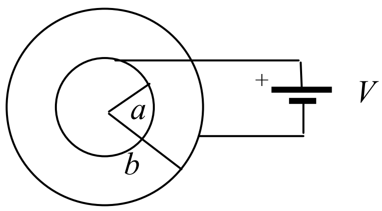
c) Supponendo invece che la sfera sia **collegata a terra** come schematizzato in figura**,** quanto verrebbe a valere il campo elettrico $E'(r)$ nella regione esterna alla sfera, cioè per $r>b$? [Ricordate che collegare a terra significa porre a "potenziale nullo" un conduttore!]

$E'(r)$ = ………………………………….. 0 [altrimenti la superficie esterna della sfera verrebbe ad avere una differenza di potenziale rispetto all'infinito, cioè non sarebbe a potenziale nullo, dato che $-\int_b^\infty E'(r)\, dr$ è diverso da zero se $E'(r)$ è diverso da zero]

d) Quanto vengono a valere, in questo caso, le cariche q'_a e q'_b rispettivamente sulla superficie della cavità ($r=a$) e sulla superficie della sfera ($r=b$)?

q'_a = ………………………………….. $-q$ [resta valido il ragionamento della risposta b)]

q'_b = ………………………………….. 0 [la sfera in questo caso deve portare una carica pari a $-q$ per "annullare" nella regione $r>b$ il campo creato dalla carica q, da cui il risultato]



2. Avete due gusci cilindrici di materiale conduttore coassiali tra loro, di raggio rispettivamente a e b, e lunghezza h (tutti e due, e, al solito, la lunghezza è così grande da poterli considerare praticamente infiniti). I due gusci sono collegati ad una batteria che genera una differenza di potenziale V (il guscio interno è collegato al polo positivo). Il sistema è all'equilibrio (cioè il condensatore è stato "caricato completamente"). La figura rappresenta il sistema visto dall'alto.

a) Come si esprime la dipendenza funzionale del campo $E(r)$ (modulo) con il raggio r nella regione compresa tra le due armature cilindriche, cioè per $a < r < b$? [Dipendenza funzionale significa che dovete stabilire come va il campo con il raggio impiegando qualche parametro ancora incognito del problema, ad esempio la carica Q presente sull'armatura interna]

$E(r)$ = ………………………………….. $Q/(\varepsilon_0 2\pi h\, r)$ [è il "solito" campo prodotto da una distribuzione uniforme di geometria cilindrica, e si ottiene con Gauss]

b) Ora, tenendo conto dei dati del problema, quanto vale la carica Q presente sull'armatura interna (quella di raggio a)? [Il dato che vi consiglio di impiegare è la differenza di potenziale!!]

Q = ………………………………….. $\varepsilon_0 2\pi h\, V / \ln(b/a)$ [viene calcolando la differenza di potenziale tra a e b e ponendola pari a V. In pratica si usa la $V = -\int_a^b E(r)\, dr$, usando la dipendenza funzionale del campo derivata nella risposta a). Non lo abbiamo detto esplicitamente, ma ovviamente il campo è radiale e, come si vede dalla risposta a), anche **non** uniforme benché nella regione tra le armature non ci siano cariche di volume (dipende dalla geometria cilindrica: fosse stato un condensatore ad armature piane il campo sarebbe stato uniforme: riflettete!]

c) Quanto valgono le **densità superficiali** di carica σ_a e σ_b sulle due armature?

σ_a = …………………………………... $Q/(2\pi h\ a)$ [la densità di carica è uniforme per invarianza rotazionale del problema, e il risultato si ottiene dividendo la carica per la superficie del guscio]

σ_b = …………………………………... $-Q/(2\pi h\ b)$ [come sopra, notando che sull'armatura esterna si accumula una carica uguale ed **opposta** a quella dell'armatura interna – il condensatore deve essere globalmente "scarico"]

d) Quanto vale la capacità C del condensatore?

C = …………………………………... $Q/V = \varepsilon_0\ 2\pi h\ /\ ln(b/a)$ [per definizione]

e) Quanto vale l'energia elettrostatica U_E accumulata nel condensatore?

U_E = …………………………………... $CV^2/2 = Q^2/(2C) = \varepsilon_0\ 2\pi h\ V^2\ /\ (2ln(b/a))$

f) Nel processo di carica del condensatore, che si suppone sia stato compiuto in precedenza, il generatore di differenza di potenziale ha eseguito un certo lavoro L_G. Se si suppone di suddividere il processo di carica, che avrà richiesto un certo tempo, in tanti intervalli infinitesimi in ognuno dei quali una carica infinitesima dq viene "portata sulle armature", quanto vale il lavoro infinitesimo dL_G associato ad ogni intervallino? [Suggerimento: ricordate il legame tra differenza di potenziale e lavoro delle forze del campo]

dL_G = …………………………………... $V\,\mathrm{d}q = (q/C)\,\mathrm{d}q$ [infatti il generatore compie su una carica dq un lavoro pari a Vdq; notate che, nel processo di carica, la differenza di potenziale tra le armature **non** è costante, e può convenientemente essere espressa come q/C (non è costante perché q aumenta fino al valore Q che avrà all'equilibrio)]

g) Quanto vale il lavoro complessivo L_G fatto dal generatore per completare la carica del condensatore?

L_G = …………………………………... $\int_0^Q (q/C)\,\mathrm{d}q = Q^2/(2C)$ [viene da quanto affermato qui sopra. Notate che $L_G = U_E$, come deve essere per ragioni di bilancio energetico]

3. Un condensatore piano parallelo è formato da due armature di superficie S = 10 cm^2 separate da una distanza d = 0.10 mm. La regione tra le armature è riempita completamente da un materiale dielettrico con costante relativa (**incognita**) ε_R. Il condensatore si trova inizialmente in condizioni completamente cariche (il processo di carica è stato completato in precedenza), e la differenza di potenziale tra le armature vale V_0 = 100 V.

a) Come si esprime la capacità C del condensatore in funzione dell'incognita ε_R e dei parametri geometrici del problema? [Trascurate gli "effetti ai bordi". Nota: qui non dovete dare una risposta numerica, ma solo scrivere, o calcolarvi, l'espressione della capacità]

C = …………………………………... $\varepsilon_0\ \varepsilon_R S/d$ [o lo ricordate o lo calcolate come a lezione]

b) Per scaricare il condensatore usate cortocircuitate le sue armature attraverso una resistenza R = 1.0 Mohm ed osservate che il "tempo caratteristico di scarica" vale τ = 8.8 ms. Quanto vale la costante dielettrica relativa ε_R del dielettrico? [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]

ε_R = ………………………………….. = ……... $d\ \tau\ /\ (\varepsilon_0\ S\ R) = 100$ [viene da $\tau = RC$]

c) Quanto vale l'energia totale U_J dissipata dalla resistenza per effetto Joule durante l'**intero** processo di scarica?

U_J = ………………………………….. = ……... J $U_E = CV_0^2\ /\ 2 = 8.8\text{x}10^{-5}$ J [viene dal bilancio energetico: la resistenza dissipa tutta l'energia inizialmente accumulata nel condensatore, che vale $CV_0^2/2$]

d) Quanto varrebbe il tempo di scarica τ' se utilizzaste la stessa resistenza R di cui sopra e aveste due condensatori (identici a quello considerato) in parallelo?

τ' = ………………………………….. = ……... s 2τ = 17.6 ms [viene da $\tau' = RC'$, e $C' = 2C$ per il collegamento in parallelo dei condensatori]

e) Come si esprime l'andamento temporale $E(t)$ del campo elettrico presente tra le armature? [Ricordate come si esprime il campo in un condensatore ad armature piane e parallele e tenete conto del processo "transiente", la scarica del condensatore, che stiamo considerando]

$E(t)$ = …………………………………... $V(t)/d = V_0{}^{\varepsilon-\tau/\tau}\ /\ d$