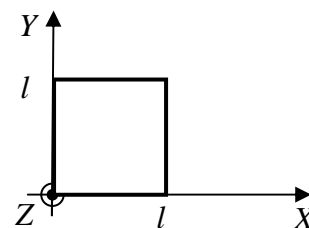


1. Un'onda piana monocromatica che si propaga nel vuoto ha funzione d'onda $E = E_0 \cos(\omega t - kx)y$, con y versore dell'asse Y ed E_0 valore costante di ampiezza, opportunamente dimensionato.

a) Scrivete la funzione d'onda $B(x,t)$ per il campo magnetico.

$$B(x,t) = \dots\dots\dots (E_0/c) \cos(\omega t - kx)z$$

b) Sul piano XY si trova una spira quadrata di lato l usata come "antenna". I lati della spira sono paralleli agli assi X ed Y ed un vertice della spira si trova sull'origine del sistema di riferimento (vedi figura). Quanto vale, istante per istante, il flusso $\Phi(t)$ del campo magnetico che attraversa la spira? [Attenzione agli integrali: avete un integrale di superficie il cui integrando dipende solo da una coordinata, per cui si può facilmente esprimere come integrale semplice!]



$$\Phi(t) = \dots\dots\dots \int_{spira} \mathbf{B}(x,t) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^l \int_0^l B(x,t) \, dx \, dy = (E_0/c) \int_0^l \int_0^l \cos(kx - \omega t) \, dx \, dy = (E_0/c)l \int_0^l \cos(kx - \omega t) \, dx = (E_0/c) (l/k) \int_{-\omega t}^{kl - \omega t} \cos \zeta \, d\zeta = (E_0/c) (l/k) \sin \zeta \Big|_{-\omega t}^{kl - \omega t} = (E_0/c) (l/k) (\sin(kl - \omega t) + \sin(\omega t)),$$

dove si è fatto il cambio di variabile $\zeta = kx - \omega t$ e si è sfruttato il fatto che la normale alla spira è parallela alla direzione del campo magnetico

c) Quanto vale la **forza elettromotrice fem** che si genera nella spira? [Usate la legge di Faraday per questa risposta]

$$fem = \dots\dots\dots - d\Phi(t)/dt = - (E_0/c) (l/k) d(\sin(kl - \omega t) + \sin(\omega t))/dt = (E_0/c) (l/k) \omega (-\cos(kl - \omega t) + \cos(\omega t)) = E_0 l (-\cos(kl - \omega t) + \cos(\omega t))$$

d) Ora cercate di ottenere la stessa risposta del punto precedente utilizzando direttamente la definizione di forza elettromotrice come circuitazione (integrale di linea sul percorso chiuso della spira) del campo elettrico. Quanto vale fem calcolata in questo modo? [Notate che questa strada è molto più immediata della precedente, e quindi senz'altro consigliabile!]

$$fem = \dots\dots\dots \int_{spira} \mathbf{E}(x,t) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l E(x=0,t) \, dy + \int_l^0 E(x=l,t) \, dy = E_0 l (\cos(-\omega t) - \cos(kl - \omega t)),$$

che è proprio l'espressione determinata prima [notate che la circuitazione sulla spira si riduce a due integrali sui due lati paralleli all'asse Y ; infatti il campo E è diretto lungo Y e quindi solo questi contributi sopravvivono quando si esegue il prodotto scalare. Inoltre fate attenzione al fatto che la circuitazione implica un "verso di percorrenza" della spira, che possiamo ad esempio scegliere in senso orario. A causa del verso di percorrenza, gli estremi di integrazione del secondo integrale sono "invertiti" rispetto a quelli del primo, cioè il secondo integrale dà un contributo **opposto** (in segno) al primo al calcolo della fem . Infine, ovviamente, dato che l'integrando è solo funzione della coordinata x , l'integrazione lungo Y si riduce ad una semplice moltiplicazione per l]

e) Avendo stabilito il valore della fem in funzione dei dati del problema, siete in grado di stabilire per quale valore della lunghezza del lato della spira l si ottengono il minimo ed il massimo della forza elettromotrice indotta. Per quale (quali) valori l_{min} si ottiene la fem minima, e quanto vale fem_{min} ? Per quale (quali) valori l_{max} ottiene la fem massima e quanto vale fem_{max} ? Commentate il significato fisico dei vostri risultati.

$$l_{min} = \dots\dots\dots 2n\pi / k = n \lambda \text{ con } n \text{ intero}$$

$$fem_{min} = \dots\dots\dots 0$$

$$l_{max} = \dots\dots\dots (2n+1)\pi / k = (2n+1) \lambda/2 \text{ con } n \text{ intero}$$

$$fem_{max} = \dots\dots\dots 2E_0 l \cos(\omega t)$$

Commento: $\dots\dots\dots$ per $l = \lambda$ (o multipli) il campo assume, istante per istante, lo stesso valore che ha in $x = 0$; dunque i due contributi della circuitazione si cancellano a vicenda. Per $l = \lambda/2$ (o multipli) il campo ha, istante per istante, valore opposto a quello che ha in $x = 0$, e quindi i due contributi della circuitazione si sommano (algebricamente) realizzando il valore massimo possibile

2. Un'onda piana monocromatica di frequenza angolare $\omega = 3.14 \times 10^{15}$ rad/s incide dal vuoto su una lastrina di vetro di spessore $d = 3.0$ cm, che ha un indice di rifrazione pari ad $n = 1.5$ (per luce della frequenza considerata). L'angolo di incidenza vale $\theta_i = 30$ gradi (vedi figura).

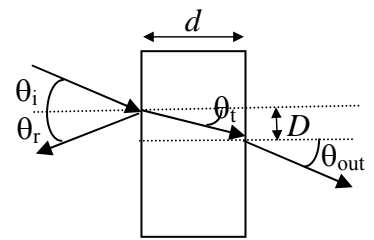
- a) Quanto valgono le lunghezze d'onda λ_0 e λ rispettivamente nel vuoto e nel mezzo dielettrico (la lastrina di vetro)? [Usate il valore $c = 3.0 \times 10^8$ m/s per la velocità della luce nel vuoto]

$$\lambda_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ nm} \quad 2\pi c/\omega$$

$$= 600 \text{ nm}$$

$$\lambda = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ nm}$$

$$2\pi(c/n)/\omega = 400 \text{ nm}$$



- b) Quanto valgono il seno dell'angolo di riflessione, $\sin\theta_r$, e dell'angolo di trasmissione (o rifrazione), $\sin\theta_t$?

$$\sin\theta_r = \dots\dots\dots = \dots\dots \quad \sin\theta_i = 0.50$$

$$\sin\theta_t = \dots\dots\dots = \dots\dots \quad \sin\theta_t/n = 0.33 \text{ [legge di Snell]}$$

- c) Quanto vale la distanza D tra punto di incidenza e punto di uscita del raggio luminoso (vedi figura)?

$$D = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ cm} \quad d \tan\theta_t = d \sin\theta_t / (1 - \sin^2\theta_t)^{1/2} = 1.1 \text{ cm}$$

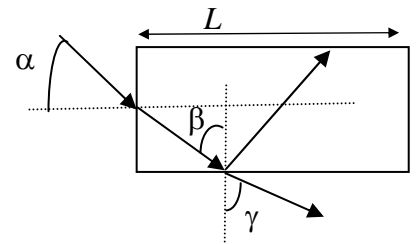
[per la trigonometria]

- d) Quanto vale l'angolo di "uscita" θ_{out} (vedi figura)?

$$\theta_{out} = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ gradi} \quad \arcsin(n \sin\theta_t) = \arcsin(n \sin\theta_t/n) = \theta_i = 30 \text{ gradi}$$

[l'angolo di incidenza sulla superficie di uscita della lastrina risulta pari a θ_t per semplici ragioni di similitudine geometrica; applicando la legge di Snell a questo raggio all'interfaccia tra mezzo e vuoto si ottiene il risultato. Dunque il fascio viene "traslato spazialmente" ma non deflesso nel passaggio attraverso la lastrina]

3. Una guida di luce "multimodo" (un tipo di fibra ottica) è costituita da un cilindro (lungo $L = 10$ m, e con un piccolo raggio, di dimensioni micrometriche) di materiale dielettrico con indice di rifrazione $n = 1.3$. Un raggio di luce entra nel cilindro colpendo il centro della sua superficie di base e formando un angolo α (generico) rispetto all'asse.



- a) Che relazione esiste tra $\sin\alpha$ e $\cos\beta$ e $\sin\gamma$ (angoli indicati in figura – prendete i valori assoluti)?

$$\cos\beta = \dots\dots\dots \sin\alpha/n \text{ [notate che, per la geometria del problema, è } \cos\beta = \sin\theta_r \text{, con } \theta_r \text{ angolo di rifrazione del raggio in entrata nella guida, da cui il risultato]}$$

$$\sin\gamma = \dots\dots\dots n \sin\beta = n(1 - \cos^2\beta)^{1/2} = (n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2}$$

- b) Determinate l'"angolo limite" di ingresso, α_{lim} , al di sotto del quale "succede qualcosa di strano" e commentate cos'è questo fenomeno strano.

$$\alpha_{lim} = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ gradi} \quad \arcsin((n^2 - 1)^{1/2}) = 56 \text{ gradi}$$

Commento: $\dots\dots\dots$ per $\alpha < \alpha_{lim}$ si avrebbe un valore $\sin\gamma > 1$, che è chiaramente assurdo.

Fisicamente, questo significa che il raggio uscente dalla fibra (per intenderci, quello che dovrebbe formare l'angolo γ di figura) viene **soppresso**, e tutta la radiazione che incide sull'interfaccia dielettrico-aria (la superficie laterale del cilindro) viene riflessa (**riflessione totale**). Questo è il meccanismo su cui si basa il funzionamento delle fibre ottiche

- c) Nelle condizioni $\alpha = \alpha_{lim}$, quanto vale il tempo τ necessario perché un breve impulso luminoso percorra l'intera guida? [Notate che il processo avviene attraverso riflessioni multiple!]

$$\tau = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ s} \quad (L/\sin\beta)/(c/n) = Ln/(c(1 - \cos^2\beta)^{1/2}) = Ln^2/(c(n^2 - \sin^2\alpha_{lim})^{1/2}) = Ln^2/c = 5.6 \times 10^{-8} \text{ s}$$

[il termine $L/\sin\beta$ rappresenta la lunghezza effettivamente percorsa dall'impulso luminoso, come si vede dalla geometria, mentre il termine c/n è la velocità con cui la luce si muove nel dielettrico]