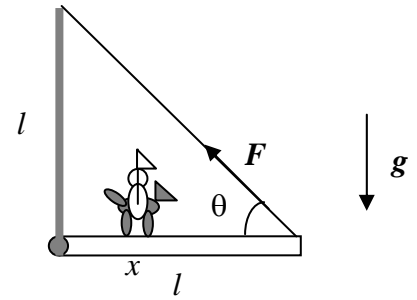


Corso di Laurea STC Chim curr appl – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 10

1. Un cavaliere medievale, di massa complessiva $M = 500$ Kg, percorre un ponte levatoio, di materiale omogeneo, lunghezza $l = 5.00$ m, e massa $m = 100$ Kg, che è incernierato senza attriti ad un suo estremo, mentre all'altro estremo è fissato tramite una catena inestensibile (di massa trascurabile) alle pareti del castello, in un punto che si trova ad una distanza verticale $l = 5.00$ m al di sopra del perno (vedi figura). Per lo svolgimento del problema, considerate il cavaliere (con cavallo e armatura) come un punto materiale.



a) Detta x la coordinata del cavaliere lungo il ponte levatoio, come si scrive la funzione $F(x)$ che rappresenta la dipendenza del modulo della tensione della catena con la posizione x ?

$F(x) = \dots\dots\dots (Mg x + mgl/2)/(l \sin\theta)$, essendo $\theta = 45$ gradi l'angolo rappresentato in figura

b) Sapendo che il carico massimo che la catena può sopportare prima di spezzarsi vale in modulo $F' = 5000$ N, quanto vale la coordinata x' a cui arriva il cavaliere prima che succeda il disastro?

$x' = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $F' l \sin\theta / (Mg) - ml / (2M) = 3.11$ m
[risolvendo l'equazione scritta sopra per x e considerando una forza pari a F']

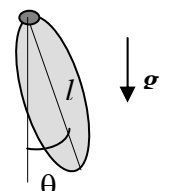
c) Tenendo conto che il ponte levatoio è ben approssimato da un'asta omogenea che ruota attorno ad un asse passante per una sua estremità, quanto vale l'accelerazione angolare α del ponte subito dopo la rottura della catena? [Se proprio non volete calcolarlo, ricordate che il momento di inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l vale, in questo caso, $I = ml^2/3$]

$\alpha = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ rad/s² $(mgl/2 + Mg x')/I = 21.2$ rad/s²
[dalla legge del moto di rotazione di un corpo rigido, tenendo conto che, subito dopo la rottura della catena, i momenti delle forze sono solo quelli dovuti alla forza peso del ponte, applicata al suo centro di massa, e del cavaliere, applicata con un braccio pari a x']

d) Il cavaliere comincerà a cadere verso il basso, ed il ponte a compiere una rotazione. Inizialmente (subito dopo la rottura della catena), quanto valgono in modulo le accelerazioni lineari A ed a rispettivamente del cavaliere e dell'estremità del ponte?

$A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $g = 9.80$ m/s² [è un grave in caduta libera!]
 $a = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s² $\alpha l = 106$ m/s² [$\gg g$!!]

2. Un ellissoide omogeneo di massa m e lunghezza l (vedi figura) può ruotare su un piano verticale attorno ad un perno passante per una sua estremità. Si suppongano trascurabili tutti gli attriti e si assuma pari ad I (noto!) il momento di inerzia.



a) A quale distanza d dal perno (misurata lungo l'asse dell'ellissoide disegnato in figura) si trova il centro di massa dell'ellissoide?

$d = \dots\dots\dots l/2$, per l'omogeneità e simmetria

b) Quanto vale, in funzione dell'angolo θ indicato in figura, il momento τ esercitato dalla forza peso rispetto al perno di rotazione?

$\tau = \dots\dots\dots m g (l/2) \sin\theta$ [la forza peso è applicata al centro di massa!]

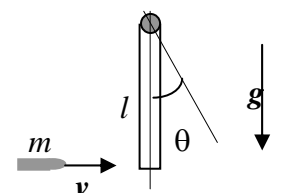
c) Quanto vale, sempre in funzione di θ , l'accelerazione angolare α dell'ellissoide? [segni!!!]

$\alpha = \dots\dots\dots - \tau / I = - m g (l/2 I) \sin\theta$

d) Se l'ellissoide viene spostato "di poco" dalla posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$, si osservano delle oscillazioni (è un pendolo che fa piccole oscillazioni!!). Quanto vale la loro pulsazione ω_{PO} ?

$\omega_{PO} = \dots\dots\dots (m g (l/2 I))^{1/2}$ [ragionate per analogia con il caso di un pendolo costituito da una massa puntiforme m legata ad una corda lunga d che fa piccole oscillazioni...]

3. Un'asta omogenea di massa $M = 1.0$ Kg e lunghezza $l = 0.50$ m è sospesa ad un perno collocato ad una sua estremità. L'asta può ruotare senza attriti attorno al perno, mantenendosi su un piano verticale. Un proiettile di massa $m = 5.0$ g e velocità (orizzontale) $v = 200$ m/s colpisce l'estremità dell'asta, come in figura, rimanendoci conficcato, quando l'asta stessa si trova ferma in posizione di equilibrio (cioè è disposta lungo un asse verticale, $\theta = 0$ – vedi figura).



- a) Quanto vale in modulo il momento angolare L_P del proiettile calcolato rispetto al perno di rotazione dell'asta nell'istante in cui il proiettile colpisce l'asta? [Suggerimento: ricordate la definizione di momento angolare rispetto ad un punto, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, con \mathbf{r} vettore che congiunge il proiettile al perno di rotazione, e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ quantità di moto del proiettile]

$$L_P = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ Kg m}^2/\text{s} \quad mvl = 0.50 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

- b) Sfruttando la conservazione del momento angolare, dovuta all'assenza di momenti delle forze esterni al sistema proiettile+asta, e sapendo che il momento di inerzia dell'asta è in questo caso $I = Ml^2/3$, quanto vale la velocità angolare ω_0 con cui l'asta avvia la sua rotazione subito dopo l'urto? [Attenzione: il proiettile rimane conficcato nell'asta, e quindi anch'esso ha un suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, benché molto piccolo]

$$\omega_0 = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ rad/s} \quad L_P / (I + ml^2) \sim 5.9 \text{ rad/s}$$

- c) L'asta comincia quindi a ruotare in senso antiorario, cioè l'angolo θ di figura tende ad aumentare. Quanto vale, in funzione di θ , il lavoro Λ fatto dalla forza peso che agisce sul centro di massa dell'asta? [Semplificazione: trascurate il lavoro della forza peso sul movimento del proiettile conficcato nell'asta – vi garantisco che l'approssimazione è ragionevole!]

$$\Lambda = \dots\dots\dots Mg(l/2) (1 - \cos\theta) \quad \text{Risultato corretto 16/4/07 grazie a Marco+Enrico}$$

- d) Quanto vale l'angolo massimo θ_{MAX} raggiunto dall'asta prima di arrestarsi?

$$\theta_{MAX} = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ gradi} \quad \text{arcsin}(1 - (I + ml^2) \omega_0^2 / (2Mgl))$$

[uguagliando il lavoro della forza peso con l'energia cinetica iniziale dell'asta – se pensate di risolvere l'esercizio "alla rovescia", cioè a partire dalla misura di θ_{MAX} , vi potete rendere conto che questo sistema può servire per misurare indirettamente la velocità del proiettile]

4. Una pattinatrice artistica su ghiaccio, che ha massa $m = 50$ Kg, fa una veloce piroetta in senso antiorario. Si trascuri l'attrito tra i pattini ed il ghiaccio.

- a) Nella configurazione iniziale, la pattinatrice tiene le braccia lungo il corpo ed il suo corpo può essere approssimato (con molta fantasia!) con un cilindro verticale **omogeneo**, di altezza h e raggio $R = 0.2$ m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Quanto vale il momento di inerzia I della pattinatrice in queste condizioni?

$$I = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ Kg m}^2 \quad mR^2 / 2 = 1.0 \text{ Kg m}^2 \text{ [è un cilindro che ruota attorno al suo asse!]}$$

- b) Sapendo che la pattinatrice compie $f = 8.0$ rotazioni al secondo, quanto valgono il modulo del suo momento angolare L e la sua energia cinetica E_K ?

$$L = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ Kg m}^2/\text{s} \quad I\omega = I2\pi f \sim 50 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

$$E_K = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ J} \quad I\omega^2/2 = I(2\pi f)^2/2 \sim 1262 \text{ J}$$

- c) Mentre sta ruotando, la pattinatrice allarga le braccia fino a disporle in direzione orizzontale. In questa nuova configurazione, essa può essere approssimata come un cilindro verticale omogeneo di massa $m_C = 45$ Kg in rotazione, che rappresenta come prima il suo corpo; le braccia tese, in vece, possono essere rappresentate come un'asta **omogenea** orizzontale, di massa $m_B = 5.0$ Kg e lunghezza $d = 1.6$ m, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo punto medio. A questo punto, quindi, il sistema (di massa complessiva m) è costituito da due elementi omogenei, il cilindro verticale e l'asta orizzontale, che ruotano solidali attorno allo stesso asse. Il momento di inerzia complessivo I' può essere quindi determinato sommando i momenti di inerzia del cilindro e dell'asta. Quanto vale I' ?

$$I' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ Kg m}^2 \quad m_C R^2 / 2 + m_B d^2 / 12 \sim 2.0 \text{ Kg m}^2$$

[ricordate l'espressione del momento di inerzia per un'asta che ruota attorno al suo punto medio!]

- d) Considerando come istante iniziale del processo quello in cui la pattinatrice piroetta a braccia lungo il corpo e come istante finale quello in cui ha le braccia orizzontali, cosa si può affermare si conservi durante il processo?

Il momento angolare L'energia cinetica Entrambe Nulla

Spiegazione sintetica della risposta: $\dots\dots\dots$ non agiscono momenti di forza esterni al "sistema" pattinatrice, e quindi il momento angolare si conserva

- e) Quanto vale la frequenza di rotazione f' al termine del processo?

$$f' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots \text{ rotazioni al secondo} \quad f I / I' \sim 4.0 \text{ rot/s}$$

[dalla conservazione del momento angolare!]