

# Interferenza e diffrazione

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 6 - FF, 4 maggio 2016)

Questa nota espone alcuni, *selezionati*, argomenti e concetti che hanno a che fare con l'interferenza e la diffrazione, con specifico riferimento al caso ottico (radiazione elettromagnetica nel visibile). Non c'è alcuna pretesa di completezza né di fronte alla ricchezza dei fenomeni coinvolti, né per quello che riguarda l'accuratezza della trattazione matematica. Chi è interessato può facilmente trovare nei testi di elettromagnetismo e ottica delle discussioni ben più complete e approfondite.

## I. INTRODUZIONE

Interferenza e diffrazione sono due concetti intimamente connessi tra loro che hanno un'importanza fondamentale nell'ambito della meccanica ondulatoria. Le conseguenze di interferenza e diffrazione sono estremamente importanti soprattutto nell'ottica. In questo ambito, esse danno luogo a fenomeni ben noti e parecchio rilevanti, nei quali è spesso difficile distinguere tra ruolo specifico dell'interferenza e della diffrazione.

In termini molto qualitativi e descrittivi, l'interferenza è quel fenomeno che stabilisce una modulazione spaziale nell'intensità di un campo elettromagnetico che è dato dalla sovrapposizione di diverse onde. La diffrazione è invece più direttamente collegata alla modifica della distribuzione spaziale dell'intensità di un'onda che attraversa delle aperture di dimensioni trasversali limitate, ovvero "interagisce" con oggetti di piccole dimensioni.

## II. INTERFERENZA

Facciamo riferimento a una situazione (molto) ideale: due sorgenti puntiformi, localizzate in due distinte posizioni sull'asse  $Z$  di un riferimento cartesiano, emettono onde piane monocromatiche *alla stessa frequenza*  $\omega$  e con la stessa direzione e verso di propagazione (supponiamo coincidente con l'asse  $Z$ ). Immaginiamo inoltre che, per semplicità, le onde si propaghino nel vuoto e che la loro polarizzazione sia lineare. Chiamiamo  $\delta$  la distanza, misurata rispetto all'asse  $Z$ , delle due sorgenti. Possiamo scrivere le loro funzioni d'onda (supposte onde piane) come:

$$\vec{E}_1 = E_{01} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{e}_1 \quad (1)$$

$$\vec{E}_2 = E_{02} \exp[i(k(z + \delta) - \omega t)] \hat{e}_2, \quad (2)$$

con ovvio e già noto significato dei simboli.

In ogni piano  $XY$  il campo sarà dato dalla *sovrapposizione* (somma vettoriale) dei campi delle due onde, cioè  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Determiniamo l'*intensità*  $I$  di questo campo risultante. Ricordando che  $I = \langle |\vec{S}| \rangle = c\epsilon_0 |\vec{E}|^2 / 2$  (siamo nel vuoto), concentriamoci sul calcolo del modulo quadro del campo elettrico. Si vede facilmente che, supponendo le ampiezze delle onde reali,

$$|E|^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 (E_1 E_2^* + E_1^* E_2) = \quad (3)$$

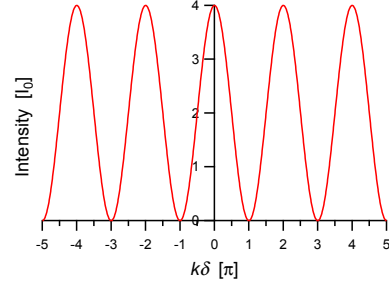


Figura 1. Grafico dell'Eq. 5 in funzione di  $k\delta$ .

$$= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \cos(k\delta). \quad (4)$$

Al solo scopo di semplificare la matematica, poniamo anche  $\hat{e}_1 = \hat{e}_2$  e  $E_{01} = E_{02} = E_0$ . In queste condizioni si ha  $|E|^2 = 2E_0^2(1 + \cos(k\delta))$ , ovvero

$$I = 2I_0(1 + \cos(k\delta)) = 4I_0 \cos^2(k\delta/2), \quad (5)$$

ancora con ovvio significato dei simboli e con l'uso, nell'ultima uguaglianza, di una semplice relazione trigonometrica. Notate che la procedura seguita per il calcolo del valore medio del modulo del vettore di Poynting è, di fatto, analoga a quella, usata altrove, in cui abbiamo posto  $I = \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} / 2$ , come si può facilmente verificare.

L'Eq. 5, rappresentata come funzione di  $k\delta$  in Fig. 1, contiene il messaggio più importante del fenomeno dell'interferenza: *l'intensità di un'onda risultante dalla sovrapposizione di due (o più) onde è "modulata" in funzione della differenza di cammino (ottico) [1]  $\delta$  delle onde considerate nella sovrapposizione*. In particolare l'intensità è massima quando  $k\delta/2 = m\pi$ , con  $m$  intero, ovvero, ricordando che  $k = 2\pi/\lambda$ , quando  $\delta = m\lambda$ , cioè la differenza di cammino ottico è pari a un multiplo intero di lunghezze d'onda. L'intensità è minima quando  $k\delta = (2m + 1)\pi$ , ovvero  $\delta = (m + 1/2)\lambda$ , cioè la differenza di cammino ottico è pari a un multiplo *dispari* di *semilunghezze* d'onda.

Nel caso considerato il *contrasto* (o visibilità) delle *frange di interferenza*, cioè il rapporto tra massimi e minimi di intensità, è massimo e vale uno. Tale contrasto può infatti essere definito come  $(I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$ , con ovvio significato dei simboli. È facile verificare (provateci) che, se le condizioni sulla polarizzazione e sull'in-

tensità delle onde vengono rilassate, l'interferenza continua a verificarsi (a meno che  $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2$ ) con contrasto minore. Può essere un utile esercizio anche quello consistente nel verificare che si ha ancora interferenza, ma con spaziatura e contrasto diverso, se i due vettori d'onda non sono collineari.

Sottolineiamo un paio di aspetti concettualmente rilevanti dell'interferenza. In primo luogo, nel fenomeno si ottiene che una grandezza scalare e stazionaria (cioè mediata nel tempo), ovvero l'intensità, viene a dipendere dall'argomento della funzione d'onda (qui compare  $\delta$ ). Inoltre, e questo è molto importante dal punto di vista delle applicazioni, la relazione che determina i massimi e i minimi di interferenza dipende dal *rapporto*  $\lambda/\delta$ : pertanto sfruttando l'interferenza è possibile realizzare dei metodi che permettono di misurare delle distanze ( $\delta$ ) essendo nota  $\lambda$  o, viceversa, di misurare  $\lambda$  essendo nota  $\delta$ .

Più in generale, l'intensità dell'onda ottenuta per sovrapposizione, che in questo caso abbiamo fatto dipendere da  $\delta$ , è funzione della *differenza di fase*, o sfasamento, tra le onde che interferiscono. Supponiamo infatti di avere una diversa configurazione sperimentale, in cui poniamo  $\delta = 0$ , cioè le due sorgenti sono posizionate nello stesso punto. Supponiamo poi che negli argomenti delle funzioni d'onda di Eq. 1 siano presenti dei termini di fase costante, per esempio  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , con  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ . Ripetendo il procedimento, troveremo che l'intensità è funzione proprio dello sfasamento  $\Delta\phi$ . Dovremmo infatti ottenere  $I = 2I_0(1 + \cos(\Delta\phi))$ . Ciò non deve stupire, poiché, in generale, la comparsa di termini di fase costante nell'argomento della funzione d'onda corrisponde a traslare l'origine del sistema di riferimento (delle posizioni e/o dei tempi).

## A. Coerenza

Come già anticipato, la situazione esaminata è molto ideale. Abbiamo infatti scritto due funzioni d'onda relative alle onde prodotte dalle due *distinte* sorgenti, distanti  $\delta$  l'una rispetto all'altra, immaginando di poterci riferire agli stessi sistemi di riferimento temporale (e spaziale, nell'onda propagante posizione e tempo sono "mescolati" fra loro). Questo equivale a porre pari a zero lo *sfasamento* tra le due sorgenti. Specie quando si esaminano problemi di ottica, in cui le frequenze di oscillazione sono dell'ordine di  $10^{14} - 10^{15}$  Hz, questa scelta non è affatto realistica. Infatti l'affermazione corrisponde a supporre che gli emettitori, ad esempio dipoli oscillanti, delle due sorgenti oscillino sempre *in fase* tra loro. Questi emettitori sono degli oggetti materiali e come tali risentono di processi (termici, collisionali, etc.) che hanno una natura statistica e che intervengono statisticamente per modificare la fase di un gruppo di oscillatori rispetto a un altro.

La situazione ideale immaginata corrisponde a dichiarare che le due sorgenti sono *coerenti* fra loro, ovvero,

appunto, che producono onde la cui relazione di fase, o sfasamento, rimane costante nel tempo. La caratteristica di *coerenza* è di estremo interesse in ottica, sia classica che quantistica, e i concetti che ad essa sono collegati possono avere diverse declinazioni, tutte intrecciate fra loro, a seconda del problema specifico che si vuole trattare. Dunque possono esistere diverse definizioni di coerenza (per esempio coerenza spettrale, temporale, spaziale, etc.) a seconda dello specifico problema che si sta affrontando. Naturalmente questa non è la sede giusta per discutere l'argomento in modo completo, e ci accontentiamo di vedere le conseguenze della coerenza in ambiti semplici, a partire dal problema (ideale) di interferenza che abbiamo citato.

In questo problema, una situazione molto più realistica è quella in cui le due sorgenti indipendenti sono rimpiazzate da due frazioni (in intensità) della stessa onda. Questo è quanto si verifica ad esempio nell'interferometro di Michelson (ma anche di Fizeau, di Fabry-Perot, di Bragg, etc.). In questo caso, le onde che si sovrappongono possono essere "automaticamente" in fase tra loro, essendo generate dalla stessa sorgente. D'altra parte, "frazionare" un'onda, cioè "dividerla" (fare uno *splitting*) in parti che corrispondono a onde che portano una frazione di intensità e hanno direzioni di propagazione diverse fra loro, è una procedura tecnicamente semplice. Infatti è sufficiente impiegare dei *beam splitters*, cioè degli specchi semi-riflettenti, per raggiungere lo scopo nella maggior parte delle configurazioni sperimentali di interferenza.

Tuttavia, come chiariremo con un esempio nella prossima sottosezione, operare in questo modo non garantisce di avere sovrapposizione di onde coerenti, a meno che le caratteristiche dell'unica sorgente che si impiega non siano adeguate rispetto all'esperimento che si vuole condurre. In altre parole, la caratteristica di coerenza che abbiamo qui attribuito a due distinte onde può essere applicata alla singola sorgente, che deve essere coerente affinché l'interferenza funzioni come richiesto.

### 1. Pacchetti d'onda e coerenza

Infatti c'è sicuramente un altro aspetto di debolezza concettuale nella descrizione usata in Sezione II. Sapete tutti che un'onda non può essere puramente monocromatica. Applicando il cosiddetto *principio di indeterminazione* (credo che tutti ne abbiate conosciuto almeno una formulazione, e forse lo avete anche già dimostrato matematicamente), per ottenere la pura monocromaticità occorre supporre che la sorgente sia stata accesa a un tempo infinitamente precedente a quello di osservazione e che venga spenta a un tempo infinitamente successivo.

Più realisticamente dovremmo considerare un'onda come composta da diverse *componenti spettrali*, cioè come data dalla sovrapposizione di onde dotate di frequenze diverse all'interno di un certo intervallo  $\Delta\nu$ , che possiamo chiamare grossolanamente *larghezza di riga*. Sappiamo già come comportarci nel caso di fenomeni ondulatori

periodici, dove è possibile scrivere l'onda risultante sotto forma di *serie* di Fourier di diverse componenti, ognuna di frequenza multiplo di una frequenza di base. Qui, a causa del fatto che le varie componenti hanno frequenza che varia in modo *continuo* nell'intervallo  $\Delta\nu$ , la serie è sostituita da un *integrale*.

Siete fortemente invitati a prendere Python e sommare fra di loro tante (virtualmente infinite) onde armoniche di frequenze leggermente (virtualmente infinitesimalmente) diverse fra loro: vedrete che il risultato della somma avrà un'estensione temporale finita  $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$ , cioè sarà sensibilmente diverso da zero in questo intervallo, come rappresentato in Fig.2: questo  $\Delta t$  in certi contesti ha il ruolo di misura dell'*intervallo temporale di coerenza* della sorgente. Tenendo conto della propagazione, che avviene alla velocità di fase dell'onda (velocità della luce, nel caso che stiamo esaminando in cui la propagazione è nel vuoto), a questo  $\Delta t$  corrisponde un'estensione spaziale finita,  $\Delta L \sim c\Delta t = c/\Delta\nu$ . A questo  $\Delta L$  in certi contesti viene attribuito il nome di *lunghezza di coerenza* della sorgente. Dunque un  $\Delta\nu$  (relativamente) piccolo corrisponde a (relativamente) grandi valori di  $\Delta t$  e  $\Delta L$ , cioè caratterizza un'onda (relativamente) molto coerente.

La sovrapposizione di tante onde armoniche produce dei *pacchetti d'onda* (un pacchetto d'onda è quello rappresentato in Fig. 2), oggetti matematici che vi saranno di grandissima utilità andando avanti con gli studi. In un esperimento in cui si vuole creare interferenza dividendo in due (o più) frazioni di intensità un'onda, come in un interferometro, è chiaro che l'interferenza può verificarsi solo dalla sovrapposizione degli "stessi" pacchetti d'onda. Pensate infatti all'interferometro di Michelson, e immaginate che la differenza di cammino ottico tra le due frazioni di onda che si vanno a sovrapporre sia maggiore dell'estensione spaziale dei pacchetti prodotti dalla sorgente: i due pacchetti d'onda che percorrono i due distinti cammini ottici nell'interferometro non si potranno sovrapporre, o si sovrapporranno solo parzialmente, sullo schermo o sul rivelatore impiegato per misurare l'intensità. Di conseguenza non si avrà interferenza, o il contrasto delle frange sarà ridotto e la visibilità del fenomeno sarà scarsa.

Come già sottolineato, sorgenti molto monocromatiche, cioè con un  $\Delta\nu$  piccolo, producono pacchetti d'onda di grande estensione spaziale e temporale. Talvolta (e senza entrare troppo nei dettagli delle definizioni) si dice che tali sorgenti sono *spetttralmente, spazialmente e temporalmente coerenti*. Un ottimo esempio è rappresentato dai laser, specie di alcune tipologie, all'interno dei quali i singoli emettitori (ad esempio, dipoli elettrici) sono in qualche modo costretti ad oscillare tutti in fase tra loro fornendo una radiazione coerente. In alcuni laser si ottengono piuttosto facilmente larghezze di riga  $\Delta\nu < 100$  Hz (a questo corrisponde un rapporto  $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-12}$ , che sancisce in modo chiarissimo la "superiorità" dei laser rispetto a qualsiasi altra sorgente di radiazione in termini di "accuratezza"), che danno luogo nel vuoto a pacchetti d'onda estesi qualche migliaio di chilometri. I laser a

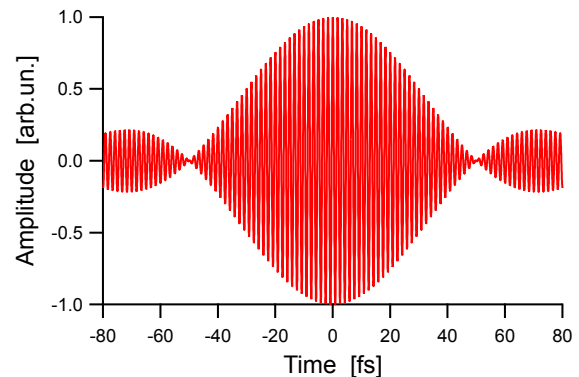


Figura 2. Risultato della somma di mille funzioni armoniche del tempo di frequenza omogeneamente distribuita in un intervallo  $\Delta\nu = 2 \times 10^{13}$  Hz centrato attorno alla frequenza  $\nu = 6 \times 10^{14}$  Hz (onda molto poco monocromatica!). Si osserva la formazione di un "pacchetto d'onda" nel dominio del tempo, la cui estensione temporale è  $\Delta t \approx 2/\Delta\nu = 100$  fs.

diodo che usate in laboratorio non sono propriamente un ottimo esempio di sorgente coerente: più che la larghezza di riga (che è in genere dell'ordine dei MHz), conta la scarsa stabilità di operazione a tempi medi/lunghi e la possibilità, tipica proprio dei laser a diodo, di "saltare" in modo discreto da una frequenza a un'altra. Di fatto i pacchetti d'onda generati difficilmente hanno estensioni spaziali maggiori di qualche decina di cm. Infine, un veramente pessimo esempio di sorgente coerente è rappresentato da una lampada a filamento, dove i singoli emettitori si comportano ognuno per conto suo (l'emissione ha un'origine termica, inerentemente stocastica) e la lunghezza di coerenza è molto molto piccola.

### III. HUYGENS E DIFFRAZIONE

Prima di procedere con la descrizione di alcuni fenomeni di diffrazione e di discutere come essi siano legati all'interferenza, è necessario richiamare alcuni principi e teoremi che sono parte dell'ottica ondulatoria e che in questa nota saranno solo brevemente citati per sommi capi. In particolare ci serve quello che in genere viene chiamato *principio di Huygens*, che a sua volta deriva da un teorema detto di Kirchoff (o di Kirchoff-Fresnel, o forse anche di qualcun altro). Ci serve sapere che *ogni piccola regione di un fronte d'onda si comporta come una sorgente di onde secondarie*; queste onde secondarie sono tutte in fase tra loro, hanno la forma di onde sferiche e sono prevalentemente emesse nello stesso verso e direzione dell'onda primaria, quella di cui stiamo considerando il fronte d'onda.

Teoremi e principi di questo tipo sono stati importantissimi nella storia dell'ottica, in particolare nell'800, per dimostrare matematicamente la possibilità di propagazione di un'onda elettromagnetica nel vuoto, costituendo un valido elemento di opposizione ai teorici dell'etere. Al

giorno d'oggi del concetto di etere non c'è più bisogno, e molte delle affermazioni contenute in questi teoremi e principi suonano piuttosto ovvie. Come vedremo tra breve, però, c'è qualcosa che rende molto utile servirsi di questi principi nell'ambito di quello che vogliamo analizzare.

### A. Interferenza da doppia fenditura (Young)

Ci serviamo del famoso esperimento della doppia fenditura (esperimento di Young) per introdurre il passaggio da interferenza a diffrazione. La fama di questo esperimento si deve soprattutto al fatto che esso è in genere considerato come un ottimo banco di prova per verificare il dualismo onda/particella (e tanti altri bellissimi argomenti), e lo incontrerete di sicuro in futuro proprio in questa veste. Qui siamo completamente ondulatori e quindi ci limitiamo a interpretare l'esperimento come interferenza fra due onde. Notate che, al termine di queste note, torneremo sullo stesso esperimento per delle precisazioni molto rilevanti.

Nell'esperimento di Young un'onda, che supponiamo piana e monocromatica (abbiamo già accennato a come si fa a trattare situazioni un po' più realistiche, ma non vogliamo complicarci la vita), incide ortogonalmente su una lamina opaca su cui sono praticate due (piccole) aperture lineari, chiamate anche *fenditure*. Le dimensioni trasversali di queste fenditure sono molto importanti per la descrizione completa del fenomeno, come vedremo al termine di questa nota. Per il momento supponiamo che esse siano "molto piccole" e che la *separazione* spaziale tra di esse sia  $d$ . Di fronte alla lamina, parallelamente e a grande distanza ( $D \gg d$ ) da questa, si trova uno schermo su cui si osservano delle frange di interferenza caratterizzate da una certa intensità  $I$  dipendente dalla posizione angolare  $\sin \theta$ . La Fig. 3(a) mostra uno schema dell'esperimento.

Secondo il principio di Huygens le due aperture, che intercettano un fronte dell'onda "primaria", si comportano da sorgenti di onde secondarie le quali risultano in fase tra loro; queste due sorgenti si trovano inoltre in posizioni diverse nello spazio. Le onde prodotte dalle aperture sono sferiche, quindi emesse in tutte le direzioni (in "avanti", cioè verso lo schermo), però, visto che siamo interessati a vedere cosa succede sullo schermo, che si trova a grande distanza dalle sorgenti stesse, esse potranno essere bene approssimate da onde piane. Dunque in ogni posizione dello schermo c'è sovrapposizione delle due onde (coerenti) provenienti dalle aperture e di conseguenza si ha un fenomeno di interferenza.

Scegliamo un punto generico sullo schermo: la sua coordinata sarà  $x$  (l'asse  $X$  è verticale in figura e centrato sull'"asse geometrico del sistema", che in questo caso passa per il punto di mezzo tra le due aperture). In alternativa alla coordinata  $x$ , potremo identificare il punto attraverso l'angolo  $\theta$ , formato tra il raggio vettore e l'asse del sistema, la cui direzione coincide con quella di propa-

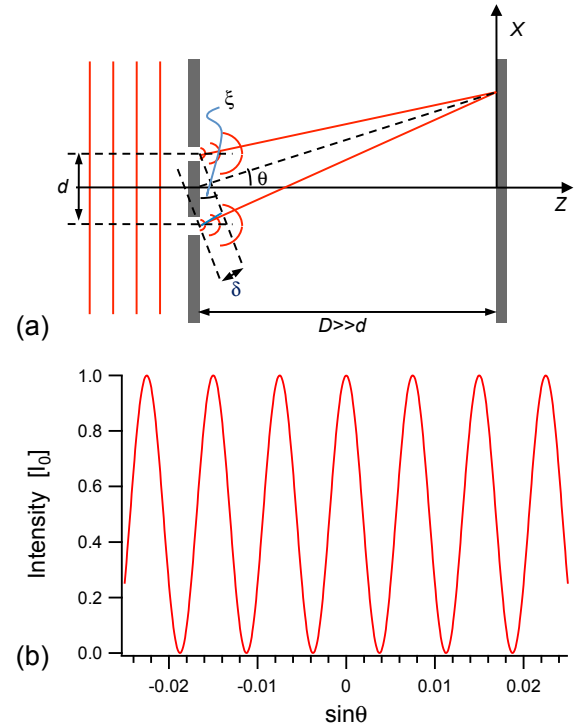


Figura 3. Schema dell'esperimento della doppia fenditura (a) e calcolo dell'intensità sullo schermo in funzione di  $\sin \theta$  (b). Nel calcolo si è assunta una spaziatura  $d = 100 \mu\text{m}$  e una lunghezza d'onda  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Per chiarezza, si è considerato un piccolo intervallo di variazione di  $\sin \theta$  e sono state applicate tutte le approssimazioni citate nel testo.

gazione dell'onda primaria. Questa descrizione a parole è complicata, per cui conviene riferirsi alla figura.

Sappiamo che l'interferenza costruttiva e distruttiva, ovvero la presenza di massimi e minimi di intensità, dipende dalla differenza di cammino ottico  $\delta$  tra le due onde, ovvero dal loro sfasamento. Una semplicissima costruzione geometrica ci permette di individuare il segmento  $\delta$  (vedi figura). Una altrettanto semplice considerazione ci permette di affermare che, per  $D \gg d$ ,  $\delta = d \sin \xi$ , con  $\xi$  indicato in figura. Inoltre  $\xi \approx \theta$ , per cui  $\delta \approx d \sin \theta$  (tutte le considerazioni geometriche svolte richiedono di immaginare una figura disegnata davvero in scala, cioè con  $D$  molto più grande di  $d$ ).

A causa dell'interferenza, l'intensità  $I(\theta)$  sullo schermo segue l'andamento descritto dall'Eq. 5, con  $\delta \approx d \sin \theta$ , cioè:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2(kd \sin \theta / 2), \quad (6)$$

dove  $I_0$  è qui il massimo dell'intensità della radiazione che incide sullo schermo e abbiamo "accettato" l'approssimazione sostituendo  $\approx$  con  $=$ . La Fig. 3(b) mostra l'andamento dell'intensità in funzione di  $\sin \theta$ : si osservano dei massimi e minimi di interferenza regolari. I massimi si trovano nelle posizioni angolari  $(\sin \theta)_{max}$  tali che  $kd(\sin \theta)_{max} = 2m\pi$ , con  $m$  intero, cioè  $(\sin \theta)_{max} =$

$2m\pi/(kd) = m\lambda/d$ ; i minimi si trovano nelle posizioni angolari  $(\sin\theta)_{min}$  tali che  $kd(\sin\theta)_{min} = 2(m+1)\pi$ , con  $m$  intero, cioè  $(\sin\theta)_{min} = (2m+1)\pi/(kd) = (m+1/2)\lambda/d$ .

Osservate che, nelle tipiche condizioni sperimentali in cui  $D \gg d$ , la trigonometria permette di fare le seguenti ulteriori approssimazioni:  $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = x/D$ . In altre parole, considerando piccole variazioni angolari e spaziali, che sono quelle di interesse, si ha che la *separazione spaziale* dei massimi o dei minimi sullo schermo (la separazione è la stessa per i massimi e i minimi) è  $(\Delta x)_{max}$  o  $min = \lambda D/d$ : ritroviamo ancora una volta il legame tra posizione delle frange di interferenza con lunghezza d'onda e distanza (in questo caso separazione  $d$  fra le fenditure) che caratterizza in termini "generalisti" l'interferenza. Inoltre notiamo come sull'asse geometrico del sistema, in una posizione che è "schermata" geometricamente rispetto all'onda incidente, troviamo un bel massimo di interferenza, circostanza che potrebbe sembrare poco probabile se non si considerasse nei dettagli il fenomeno descritto.

## B. Interferenza da reticolo ottico

Un'estensione particolarmente rilevante, soprattutto a causa delle notevoli applicazioni pratiche, è quella che prevede di rimpiazzare il sistema delle due fenditure con un sistema di tante,  $N$ , fenditure, tutte spaziate fra loro in modo regolare di una distanza  $d$ . Un sistema di questo tipo si chiama spesso *reticolo ottico* o, meglio, *reticolo di diffrazione* (concetti e denominazioni di interferenza e diffrazione cominciano a sovrapporsi tra loro anche nella nomenclatura), e la modalità di impiego a cui facciamo qui riferimento è detta *in trasmissione*, per distinguerla da quella *in riflessione*, in cui i reticoli trovano applicazione ancora più ampia.

Ogni coppia di fenditure si comporta come nell'esempio precedente, cioè è sorgente di onde secondarie in fase tra loro. È evidente che per determinare la funzione dell'intensità  $I(\theta)$  ( $\theta$  è definito in analogia con prima) bisogna considerare l'interferenza tra tante onde. La matematica è complicata, e implica la convergenza di una serie non banale, come potete trovare in alcuni testi di ottica. Qui ci accontentiamo di riportare il risultato finale e i commenti che ci si possono fare sopra. Si ottiene:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2\gamma} \quad (7)$$

$$\gamma = \pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta, \quad (8)$$

dove tutti i simboli sono ovvi o già definiti.

Vediamo le proprietà della funzione che abbiamo scritto. Cominciamo con il notare che, quando il numeratore e il denominatore tendono entrambi a zero, come si verifica per  $\gamma \rightarrow m\pi$ , con  $m$  intero, la funzione ha dei massimi (assoluti) che tendono al valore  $N^2$ . Tenendo conto dell'espressione di  $\gamma$ , si vede come la condizione implichi  $\sin(\theta_{max'}) = m\lambda/d$ . Quindi si trova un massimo

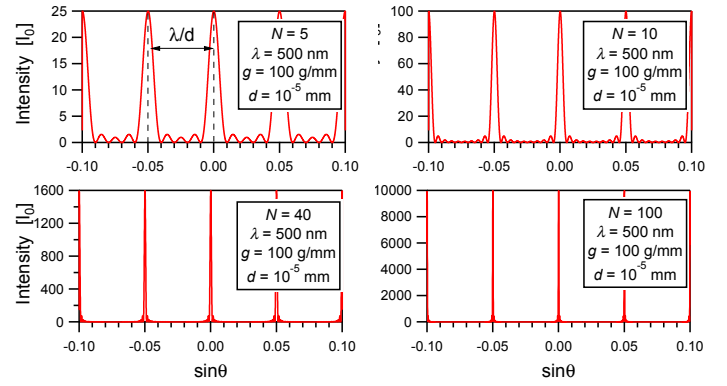


Figura 4. Calcolo della trasmissione attraverso un reticolo di diffrazione eseguito secondo l'Eq. 7. Nel calcolo si è supposto  $\lambda = 500$  nm e  $d = 1/g = 100\mu\text{m}$ . I diversi grafici si riferiscono a diversi valori di  $N$ , come in legenda.

"centrale", per  $m = 0$ , e tanti altri massimi spazati di  $\lambda/d$ . L'apice impiegato nelle espressioni, quello posto su *max*, è dovuto al fatto che esiste anche un'altra "tipologia" di massimi, che si hanno quando il numeratore ha un massimo, cioè  $N\gamma = (m+1)\pi/2$  e, contemporaneamente, il denominatore è diverso da zero. Tenendo conto dell'espressione di  $\gamma$ , questi massimi, che hanno carattere relativo, si trovano per  $(\sin\theta)_{max''} = [(m+1/2)/N]\lambda/d$ . Tra un massimo relativo e il successivo ci sono ovviamente dei minimi, che si ottengono quando il numeratore va a zero e, contemporaneamente, il denominatore è diverso da zero. Questo si ottiene per  $(\sin\theta)_{min} = (m/N)\lambda/d$ . Per capire meglio l'andamento della funzione, conviene riferirsi a grafici di  $I(\theta)$  calcolati numericamente, come quelli rappresentati in Fig. 4, dove il calcolo è svolto per diversi valori di  $d$ .

Come già affermato, la distanza, o spaziatura, fra due massimi (consecutivi) della prima tipologia, i massimi assoluti, vale  $(\Delta\sin\theta)_{max'} = \lambda/d$  e *non dipende* dal numero  $N$  di fenditure. Poi ci sono dei minimi, pari a zero, la cui spaziatura è  $(\Delta\sin\theta)_{min} = \lambda/(Nd)$ . Facendo un po' di matematica, si ottiene che tra un massimo assoluto e l'altro ci sono  $(N-1)$  minimi. Infine è evidente che tra un minimo e l'altro si situano i massimi relativi che corrispondono alla tipologia indicata sopra con il doppio apice. Tra due massimi principali (assoluti) ci sono  $(N-2)$  massimi relativi.

È molto interessante osservare come si modifica il sistema di frange di interferenza all'aumentare del numero  $N$  di aperture, o fenditure. Si vede in Fig. 4 che non solo il numero di minimi aumenta, ma anche che i massimi relativi diventano sempre più deboli mentre quelli principali si rinforzano (l'intensità di picco scala con  $N^2$ ) e diventano sempre più snelli.

Nella pratica si hanno spesso a disposizione dei reticoli ottici di grandi dimensioni. Dunque aumentare il numero  $N$  di fenditure interessate dalla radiazione significa di fatto aumentare le dimensioni del fascio di luce che in-

cide sul reticolo. Ne risulta la soppressione dei massimi relativi, l'aumento e lo "strizzamento" di quelli principali. Se immaginate di usare un reticolo di diffrazione per disperdere la radiazione (in modo molto più efficiente che non con un prisma) e misurare la lunghezza d'onda della radiazione, cosa ben possibile supponendo che  $d$  sia noto, allora è evidente che allargare la regione di reticolo illuminata porta notevoli vantaggi nell'accuratezza e sensibilità della misura.

Facciamo ancora qualche altra osservazione di tipo pratico. Spesso anche usando i reticoli di diffrazione si misura in realtà non lo spostamento angolare  $\theta$ , ma quello lineare  $x$ , esattamente come nel caso dell'interferenza da doppia fenditura. A questo scopo si può spesso usare l'approssimazione  $\sin \theta \approx x/D$ , con  $D$ , al solito, distanza del reticolo dallo schermo di osservazione. Dunque la posizione dei massimi principali rispetto all'asse geometrico del sistema è  $(x)_{max'} = mD\lambda/d$ . All'intero  $m$  si dà spesso il nome di *ordine di diffrazione* e, per i motivi che chiariremo al termine di questa nota, in genere si preferisce, o talvolta si è costretti, a usare il primo ordine di diffrazione,  $m = \pm 1$ .

Sempre dal punto di vista pratico, notate che normalmente i reticoli vengono caratterizzati non con la spaziatura  $d$  tra le fenditure, ma con il suo reciproco,  $g = 1/d$ , che è la densità lineare di fenditure. In genere  $g$  si dà in *numero di righe* per mm. Per motivi legati alla costruzione e alla maggiore facilità con cui si riesce a illuminare una vasta porzione del reticolo, molto spesso i reticoli si usano *in riflessione*. Reticoli in riflessione da 1800 o anche 3600 righe/mm (o grooves/mm) sono piuttosto comuni in ottica, dove costituiscono l'elemento principale di strumenti diffusissimi per la spettroscopia (cioè per misurare le componenti spettrali dell'emissione) che si chiamano spettrometri o, spesso, *monocromatori*. Alcuni monocromatori, che fanno uso di reticoli molto grandi e di una grande "distanza focale" (l'equivalente della distanza  $D$  tra reticolo e schermo), permettono di risolvere emissioni con lunghezze d'onda separate da molto meno di 1 Å, come necessario per esempio nella cosiddetta spettroscopia Raman.

Ultimissima annotazione. Ci sono molti oggetti che si comportano in modo simile ai reticoli. Senza citare le ali della farfalla (che danno luogo all'iridescenza) o alcune vernici di automobili che ne simulano il funzionamento, e lasciando da parte anche le chiazze di olio sull'acqua, o in generale i fenomeni che si verificano quando ci sono degli strati sottili di materiali dielettrici sovrapposti, per i quali è più corretto fare riferimento all'interferenza (multipla) "alla Bragg", che studierete in altri contesti, possiamo ricordare CD e DVD. Essi sono (o erano) realizzati premarcando un substrato plastico con delle piste tangenziali, il cui pitch (distanza in direzione radiale fra una pista e l'altra) vale rispettivamente 1.6 e 0.74  $\mu\text{m}$ . In certe condizioni queste piste possono comportarsi come le righe di un reticolo di diffrazione in riflessione (il substrato è opaco, e quindi in trasmissione non funziona), con una separazione pari al pitch. Infatti tutti sapete che,

osservando la riflessione della luce con spettro continuo (quella di una lampadina, per intenderci) su un CD o un DVD, si vedono i colori dell'iride separati spazialmente, ovvero dispersi, tra loro.

#### IV. DIFFRAZIONE DA SINGOLA FENDITURA (LINEARE)

Finalmente arriviamo a esaminare un caso in cui è davvero più opportuno parlare di diffrazione che non di interferenza, anche se l'interferenza è sempre un concetto da tenere ben presente per l'interpretazione del fenomeno.

Immaginiamo allora di avere una *singola fenditura* (di forma lineare) con una dimensione trasversale (apertura)  $a$  incisa su una lamina opaca. Suddividiamo questa apertura in tanti, virtualmente infiniti, elementini, di dimensioni trasversali virtualmente infinitesime. Applichiamo quindi il principio di Huygens a questi piccoli elementini: essi diventeranno sorgente di onde secondarie tutte in fase tra di loro. Se preferite, in una visione un po' più "fisica", si crea in questo modo un array di emettitori individuali, per esempio dipoli oscillanti, tutti in fase fra loro.

Quello che qui stiamo esaminando somiglia molto a un reticolo in cui abbiamo fatto tendere il numero  $N$  a infinito e la spaziatura  $d$  a zero, facendo in modo che il *prodotto*  $Nd$  tendesse ad  $a$ . Questo approccio, con molte cautele dovute alle complicazioni matematiche coinvolte, può essere utile per ricordare alcune caratteristiche della funzione  $I(\theta)$  in questo caso. Con un po' di passaggi, non tutti banali (al solito, potete cercarli nei testi di ottica o elettromagnetismo), si ottiene la cosiddetta *funzione di diffrazione*:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \quad (9)$$

$$\alpha = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta, \quad (10)$$

dove tutti i simboli sono ovvi o già definiti.

Facendo il limite per  $\alpha \rightarrow 0^\pm$  si vede che per questo valore la funzione ha un massimo assoluto, che corrisponde a  $(\sin \theta)_{max'} = 0$ . Si nota poi che la funzione ha dei minimi quando il numeratore si annulla (escluso, ovviamente,  $\alpha \rightarrow 0^\pm$  che abbiamo appena riconosciuto come massimo), cioè in corrispondenza di  $(\alpha)_{min} = m\pi$ , con  $m$  intero, ovvero  $(\sin \theta)_{min} = m\lambda/a$ . Tra i minimi si trovano dei massimi relativi, che si hanno per  $(\alpha)_{max''} = (m+1/2)\pi$ , con  $m$  intero, ovvero  $(\sin \theta)_{max''} = (m+1/2)\lambda/a$ . Si capisce facilmente come la situazione sia ben diversa da quella del reticolo per quanto riguarda l'altezza dei massimi. Infatti il massimo assoluto è uno solo e tutti gli altri hanno un'altezza che va diminuendo all'aumentare di  $|m|$ . Tutto questo è ben riassunto nella Fig. 5, in cui sono stati riportati i risultati del calcolo per diversi valori di  $a$ .

La figura mostra in maniera molto chiara l'effetto eclatante della diffrazione: a parte la presenza dei massimi

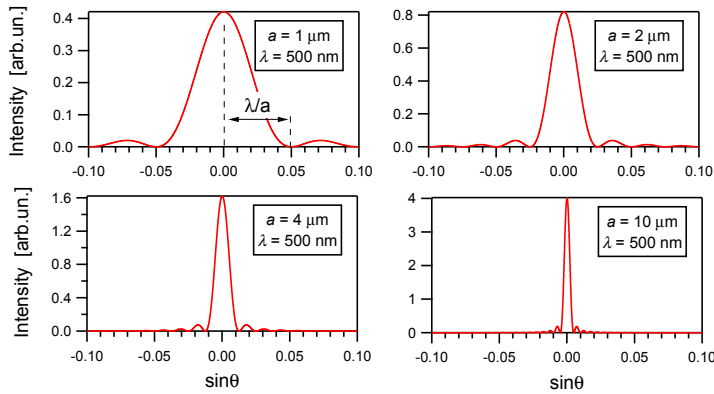


Figura 5. Calcolo della trasmissione attraverso una fenditura (lineare) di apertura  $a$  come in legenda, usando l'Eq. 9. In tutti i casi si è ipotizzata una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 500$  nm. Le intensità sono espresse in unità arbitrarie e normalizzate rispetto all'area sottesa alle curve.

relativi, che in genere hanno poca rilevanza pratica essendo associati a piccole frazioni dell'intensità totale, la larghezza del massimo principale dipende fortemente dal rapporto  $\lambda/a$ . Infatti i primi zeri della funzione si trovano nelle posizioni  $(\sin\theta)_{min} = \pm\lambda/a$ , per cui la “larghezza totale” (misurata tra gli zeri e in unità di  $\sin\theta$ ) del massimo principale è  $\sim 2\lambda/a$ . Per un fascio di luce perfettamente collimato, come possiamo ipotizzare per il fascio incidente sull'apertura (descritto da un'onda piana, dunque perfettamente collimato), si ha, prima dell'interazione con l'apertura,  $\sin\theta = 0$ . Il passaggio attraverso l'apertura introduce una divergenza del fascio, che “si allarga” tanto più quanto maggiore è il rapporto  $\lambda/a$ , cioè, a parità di  $\lambda$ , quanto minore è la dimensione dell'apertura  $a$ . Ritroverete questa identica affermazione quando affronterete, nell'ambito della meccanica quantistica, l'esperimento ideale che va sotto il nome di *microscopio di Heisenberg*, che consente una spiegazione molto immediata e intuitiva della diffrazione.

Da ultimo, è evidente che anche in questo caso spesso si preferisce nella pratica convertire lo spostamento angolare in spostamento lineare, cosa che si ottiene ponendo lo schermo a distanza  $D \gg a$  e misurando la posizione  $x$  dei minimi e massimi della figura di diffrazione. Usando le approssimazioni geometriche già ampiamente impiegate, si ottiene che la posizione dei primi minimi si trova a  $(x)_{min} = \pm D\lambda/a$ . Di conseguenza la misura di  $x$ , supponendo noto  $\lambda$  (e  $D$ ), permette di dedurre quella di  $a$ .

### A. Diffrazione da apertura circolare

Abbiamo trattato finora delle situazioni sostanzialmente unidimensionali, cioè con aperture “strette e lunghe”, per le quali diffrazione (e interferenza) hanno luogo idealmente solo lungo una direzione cartesiana. Spesso, però,

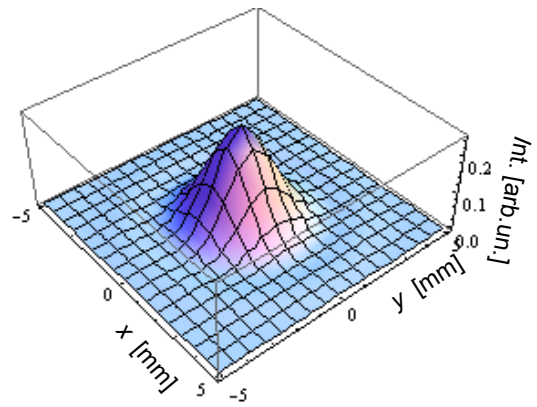


Figura 6. Rappresentazione tridimensionale della figura di diffrazione che si osserva su uno schermo posto a distanza  $D = 10$  cm quando radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 500$  nm viene diffratta da un'apertura circolare di diametro  $a = 20$   $\mu\text{m}$ . Il calcolo è stato eseguito sulla base dell'Eq. 11.

si ha a che fare con sistemi a simmetria circolare, in particolare con aperture circolari di diametro  $a$ . Anche se la fisica dei fenomeni rimane sostanzialmente la stessa, il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate circolari (cilindriche) comporta delle differenze di dettaglio, che vale la pena sottolineare.

In particolare, per quello che riguarda la diffrazione, l'uso delle coordinate cilindriche comporta una differente scrittura dell'Eq. 9, che diventa:

$$I(\theta) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha)}{\alpha^2} \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{a}{\lambda} \sin\theta, \quad (12)$$

dove  $J_1$  rappresenta una (famosa) funzione detta *funzione di Bessel di ordine uno*.

Il primo zero di questa funzione, che fornisce la posizione angolare del primo minimo della figura di diffrazione, si ha quando l'argomento è pari a 1.22, cioè per  $(\sin\theta)_{min} = 1.22(\lambda/a)$ . Supponendo di usare il solito schermo (posto a distanza  $D \gg a$  dall'apertura) e le solite approssimazioni, la figura di diffrazione darà luogo a un sistema di minimi di intensità, cioè di frange, di forma circolare, il cui diametro  $\Phi$  è legato al diametro  $a$  dell'apertura attraverso la relazione, che potete facilmente verificare,  $\Phi = 2\pi m D [1.22(\lambda/a)]$ , con  $m$  intero (spesso detto anche in questo caso ordine di diffrazione). Per intenderci, usando radiazione visibile a  $\lambda = 500$  nm e un'apertura (*pin hole*) di diametro  $a = 20$   $\mu\text{m}$ , su uno schermo posto a distanza  $D = 10$  cm si osserva un primo minimo di intensità che forma un cerchio di diametro  $\Phi \approx 6$  mm (la Fig. 6 mostra una rappresentazione tridimensionale di quanto si osserva sullo schermo in questo caso, costruita sulla base dell'Eq. 11).

## B. Young revisited

Avevamo preannunciato che saremmo tornati a occuparci dell'interferenza da doppia fenditura (Young) per darne un'interpretazione più realistica. In realtà le due fenditure incise sulla lamina opaca in quell'esperimento hanno una dimensione trasversale finita, che qui indichiamo con  $a$ , dunque esse producono diffrazione. Di conseguenza in un esperimento reale, come quello condotto in laboratorio, la figura che si osserva sullo schermo è la convoluzione di due fenomeni: interferenza dal sistema delle due fenditure e diffrazione da ognuna di esse. Infatti nell'esperienza pratica si osservano due distinti sistemi di frange, cioè due distinti sistemi di minimi e massimi di intensità regolari, con spaziature rispettivamente proporzionali a  $\lambda/d$  e  $\lambda/a$ .

La Fig. 7 mostra una simulazione in cui la modulazione dell'intensità dovuta all'interferenza delle due fenditure (Eq. 6) è stata moltiplicata per la modulazione dell'intensità dovuta alla diffrazione da parte delle due fenditure (Eq. 9). In questa ricostruzione numerica si è supposto di osservare le frange di interferenza, ovvero la figura di diffrazione risultante, su uno schermo posto a distanza  $D = 1$  m dal piano delle fenditure, per cui l'asse orizzontale rappresenta la posizione sullo schermo. Osservate che l'intensità delle frange di interferenza più lontane dall'asse geometrico del sistema (posizione  $x = 0$ ) è stata moltiplicata per un fattore, come indicato nel grafico, per compensare la forte riduzione di intensità dovuta alla diffrazione. Questa moltiplicazione, che può suonare arbitraria, è in realtà compatibile con la risposta dell'occhio umano, la cui sensibilità è fortemente nonlineare (generalmente quasi logaritmica). Il risultato mostra chiaramente la presenza dei due distinti sistemi di frange.

Ovviamente la diffrazione entra in gioco anche quando si usa nella pratica un reticolo ottico. In questo caso l'effetto è quello di abbattere l'intensità degli ordini di diffrazione superiori, per cui nelle applicazioni spettroscopiche ci si limita spesso a impiegare solo l'ordine  $m = \pm 1$ .

## V. RECIPROCIÀ, "IMPORTANZA" DELLA DIFFRAZIONE, CAMPO LONTANO E CAMPO PROSSIMO

Questo paragrafo conclusivo intende commentare in termini un po' più generali il fenomeno della diffrazione. È utile in primo luogo ricordare una sorta di principio, generalmente chiamato *principio di reciprocità* (o di Babinet), che fonda la sua esistenza su considerazioni molto generali legate all'invarianza per inversione temporale delle equazioni di Maxwell e dell'equazione d'onda.

Negli esempi che abbiamo discusso, abbiamo sempre considerato che la diffrazione, o l'interferenza, avesse origine dalla sovrapposizione di onde secondarie generate da regioni "vuote" (trasparenti) incise su lamine "opache". Questo principio stabilisce che si ottengono effetti ana-

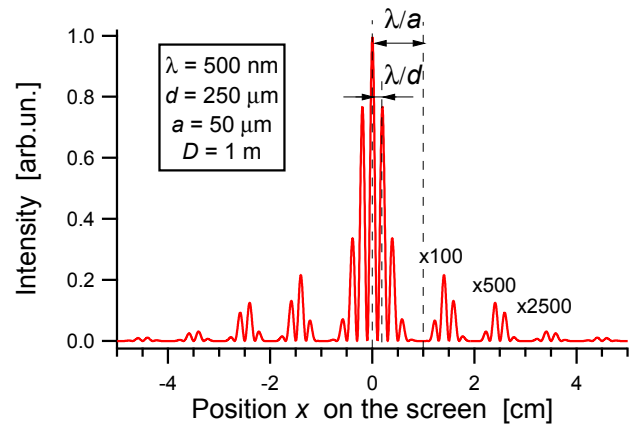


Figura 7. Simulazione dell'intensità su uno schermo (posto a distanza  $D = 1$  m) per una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 500$  nm che incide su un sistema di due fenditure di spaziatura  $d = 250 \mu\text{m}$  e dimensione trasversale  $a = 50 \mu\text{m}$ , ottenuta secondo quanto riportato nel testo. In figura sono indicati i fattori moltiplicativi per l'intensità delle frange distanti dall'asse geometrico del sistema (posizione  $x = 0$ ).

loghi, e trattabili con la stessa matematica, se i ruoli di opaco e vuoto si invertono. In altre parole, una struttura materiale opaca inserita in un ambiente trasparente produce diffrazione, sia che abbia una geometria lineare (un sottile filo, un capello, etc.), sia che abbia una geometria circolare (un granellino di polvere), o di altro tipo.

Dunque la diffrazione può essere davvero considerata come un fenomeno "universale" nel mondo ondulatorio. In ottica essa pone degli argomenti fondamentali (non "tecnologici") che producono conseguenze rilevanti in tantissimi ambiti. Vediamone qualcuno a parole.

In un qualsiasi esperimento, usare radiazione luminosa implica l'impiego di componenti (lenti, specchi, etc.) che hanno sempre necessariamente delle dimensioni finite. Dunque i fasci hanno dimensioni trasversali finite e per questo motivo la descrizione con onde piane (dove, ricordate, i fronti d'onda sono virtualmente infiniti in direzione trasversale) non è adeguata. La diffrazione introduce un'ulteriore difficoltà: un fascio di luce non può essere mai considerato come completamente collimato, per cui non solo l'estensione trasversale dei fronti d'onda è finita, ma essa, in qualche misura, dipende anche dalla posizione lungo la direzione di propagazione dell'onda.

La diffrazione ha anche un'altra conseguenza fondamentale: a differenza di quanto prevede l'ottica geometrica, un fascio non può neanche essere completamente focalizzato a formare un punto. Qualsiasi sia il sistema ottico (lente, obiettivo, o altro) impiegato per ridurre le dimensioni del fascio, cioè per *focalizzarlo*, le dimensioni trasversali dello spot focale saranno sempre finite.

Sfruttiamo, in una forma un po' diversa rispetto a quanto enunciato prima, il principio di reciprocità per affermare che le minime dimensioni dello spot sono paragonabili alle minime dimensioni trasversali di un oggetto puntiforme (opaco o trasparente che sia) misurate con un



microscopio ottico convenzionale. Un microscopio ottico è uno strumento che, usando una combinazione di lenti (obiettivo e oculare), è in grado di fornire un'immagine ingrandita di un oggetto. L'ingrandimento dipende solo dalle caratteristiche delle lenti usate e può essere virtualmente reso grande a volontà.

Tuttavia, a causa della diffrazione l'immagine dell'oggetto puntiforme verrà allargata, cioè si formerà una figura di diffrazione con un "diametro" finito e non nullo. Se supponiamo di avere due distinti oggetti puntiformi, il nostro microscopio, per quanto raffinato, ci permetterà di distinguerli solo se le figure di diffrazione prodotte dai due oggetti sono "abbastanza" separate l'una rispetto all'altra. Storicamente è stato introdotto un criterio (detto *criterio di Rayleigh*, peraltro piuttosto ottimista) che ha condotto a un limite, detto *limite di Abbe*, che stabilisce che il massimo *potere risolutivo*, cioè la minima distanza a cui possono essere collocati due oggetti puntiformi per essere apprezzati come distinti, è tipicamente dell'ordine di  $0.6\lambda$ . Questo limite è in effetti una riscrittura dell'Eq. 11, cioè nasce da una manipolazione matematica di quella equazione, a testimonianza che esso è dovuto alla diffrazione. Dunque, per quanto bravi siate stati nel costruire le lenti del vostro microscopio, potrete usarlo per determinare i dettagli di oggetti che hanno dimensioni minime dell'ordine di  $0.6\lambda$ , che nel visibile significa diverse centinaia di nm (decisamente troppo per la nanotecnologia).

Se applichiamo di nuovo in senso inverso il principio di reciprocità, possiamo concludere che le dimensioni trasversali minime dello spot focale sono dell'ordine di  $0.6\lambda$ , anche qui a prescindere dalle qualità dei componenti usati per focalizzare. Nei CD e DVD, che abbiamo già ricordato in precedenza, la scrittura/lettura avviene per via ottica. Il DVD, grazie al pitch minore rispetto al CD, dà la possibilità di raggiungere una densità di immagazzinamento ottico dei dati nettamente superiore. Bene, può essere interessante sapere che l'evoluzione tecnologica dall'uno all'altro supporto ottico è stata soprattutto conseguenza della disponibilità di sorgenti (laser a diodo) operanti a lunghezze d'onda minori, da oltre 800 nm per i primi CD, a 660 nm per i DVD. Una delle ultime evoluzioni di questa tecnologia, il Blue-Ray, deve il suo nome al fatto di impiegare sorgenti laser nel blu (405 nm). Infatti, sulla base di quanto abbiamo appena stabilito, ridurre la lunghezza d'onda consente (assieme a tanti altri dettagli di tipo tecnologico) di ridurre lo spot focale, e quindi di aumentare la densità dei "bit ottici" che contengono l'informazione.

Infine facciamo un'ultima considerazione: di fatto, in tutta la nostra trattazione abbiamo seguito un approccio di *campo lontano*. In particolare l'andamento dell'intensità per diffrazione che abbiamo ottenuto (*diffrazione di Fraunhofer*) vale solo se la distanza a cui verifichiamo gli effetti della diffrazione stessa è molto maggiore della dimensione dell'apertura (in pratica,  $D \gg a$ ). Vale la pena di ricordare che la diffrazione produce effetti estremamente interessanti anche per distanze molto piccole,

nel regime che si chiama di *campo prossimo*. Interpretare questi effetti richiede di usare una matematica diversa, nella quale, ad esempio, il carattere "propagante" delle onde elettromagnetiche non è più rilevante (se vi ponete a piccola distanza da un insieme di dipoli oscillanti, il ritardo di fase delle varie onde dovuto alla propagazione può diventare trascurabile). È interessante notare che l'opportunità di porsi a piccola distanza dalla sorgente della diffrazione (usare il campo prossimo) è talvolta impiegata proprio per superare i limiti di risoluzione spaziale dovuti alla diffrazione, cioè per costruire microscopi con elevatissimo potere risolutivo o localizzare la radiazione luminosa in regioni spazialmente limitate.

## APPENDICE I

In questa Appendice si mostra un possibile procedimento che porta a trovare l'Eq. 7 per la diffrazione da reticolo; questo procedimento ricalca quello discusso da Hecht nel suo testo di Ottica.

Il problema è schematizzato in Fig. 8: essa è simile alla Fig. 3(a), solo che stavolta le aperture, o fenditure, che compaiono in gran numero, sono disegnate più piccole. Notate che anche in questo caso la condizione  $D \gg d$  non è rispecchiata nella figura.

Numeriamo le fenditure, che sono in totale  $N$ , con l'indice  $n$  che corre da 0 a  $N - 1$ . L'ampiezza del campo elettrico  $E$  sullo schermo sarà data dalla parte reale della seguente espressione, in cui sono sommate tutte le onde che interferiscono tra loro:

$$E = \sum_{n=0}^{n=N-1} E_0 \exp[i(\vec{k}_n \cdot \vec{r}_n - \omega t)] = \quad (13)$$

$$= E_0 \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{n=N-1} \exp(ikr_n), \quad (14)$$

dove  $\vec{r}_n$  è il vettore che congiunge il (centro) dell'apertura  $n$ -esima con il punto di osservazione con lo schermo e  $\vec{k}_n$  è il vettore d'onda del "raggio" corrispondente. Per costruzione è  $\vec{k}_n // \vec{r}_n$  e, inoltre,  $|\vec{k}_n| = k = 2\pi/\lambda$ , da cui i passaggi eseguiti. Osservate che, se  $D \gg d$ , tutti i vettori  $\vec{k}_n$  e tutti i "raggi"  $\vec{r}_n$  tendono a essere paralleli tra loro. Nell'Eq. 13 abbiamo poi messo in evidenza l'ampiezza  $E_0$  dell'onda diffratta dalle fenditure e il termine di oscillazione temporale, in modo da poterci concentrare sulla serie, che è l'aspetto di interesse per il calcolo.

Mettiamo anche in evidenza il termine  $\exp(ikr_0)$  che corrisponde all'onda prodotta (ovvero diffratta) dalla fenditura marcata con  $n = 0$ :

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \exp(ikr_n) = \exp(ikr_0) \sum_{n=0}^{n=N-1} \exp[ik(r_n - r_0)]. \quad (15)$$

Ragionando in termini simili a quanto fatto nella discussione dell'interferenza da doppia fenditura (Young), possiamo porre per la differenza di cammino ottico

$$r_n - r_0 \simeq n\delta, \quad (16)$$

dove  $\delta$ , differenza di cammino ottico tra i raggi uscenti dalle fenditure 1 e 0, è definita in analogia con Fig. 3(a).

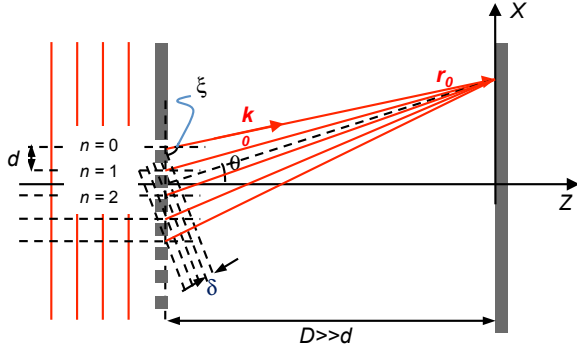


Figura 8. Schema del reticolo considerato in Appendice I, con indicate le grandezze rilevanti per il calcolo: notate la condizione  $D \gg d$ , che non può essere rappresentata adeguatamente in figura.

La serie diventa allora

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \exp(ikn\delta) = \frac{1 - \exp(iNk\delta)}{1 - \exp(ik\delta)}, \quad (17)$$

dove l'ultimo passaggio sfrutta l'espressione della somma parziale che si usa nel calcolo delle serie geometriche.

Facciamo ancora un po' di maquillage:

$$\frac{1 - \exp(iNk\delta)}{1 - \exp(ik\delta)} = \frac{\exp(-ikN\delta/2)}{\exp(-ik\delta/2)} \times \quad (18)$$

$$\times \frac{\exp(ikN\delta/2) - \exp(-ikN\delta/2)}{\exp(ik\delta/2) - \exp(-ik\delta/2)}. \quad (19)$$

Ricordiamoci ora che quello che si osserva sullo schermo è l'intensità dell'onda ottenuta per sovrapposizione, che è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza del campo. Tenendo conto che tutti gli esponenziali con argomento immaginario che si trovano a moltiplicare hanno modulo unitario (inclusi quelli che avevamo messo in evidenza in Eqs. 13, 15), avremo che l'intensità sarà

$$I \propto \left| \frac{\exp(ikN\delta/2) - \exp(-ikN\delta/2)}{\exp(ik\delta/2) - \exp(-ik\delta/2)} \right|^2 = \frac{\sin^2(kN\delta/2)}{\sin^2(k\delta/2)}. \quad (20)$$

Infine, notando in analogia con la discussione svolta in Sect. III A che  $\delta \simeq d \sin \xi \simeq d \sin \theta$ , dove le approssimazioni sono tante più valide quanto più  $D$  è maggiore di  $d$ , e ricordando che  $k = 2\pi/\lambda$ , si ottiene

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2(N\pi d \sin \theta / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \theta / \lambda)}, \quad (21)$$

che è quanto annunciato in Eq. 7, dove si era posto  $\gamma = \pi d \sin \theta / \lambda$ .

## APPENDICE II

In questa Appendice si riporta un metodo per la determinazione dell'Eq. 9 per la diffrazione da singola fenditura lineare. Stavolta il procedimento non è del tutto convenzionale e fa uso di qualche shortcut.

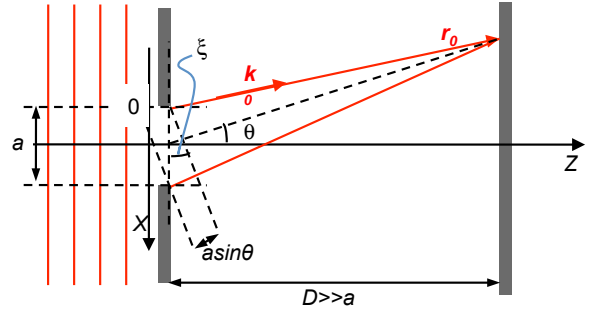


Figura 9. Schema della singola fenditura considerata in Appendice II, con indicate le grandezze rilevanti per il calcolo: notate la condizione  $D \gg a$ , che non può essere rappresentata adeguatamente in figura.

L'idea di fondo, già annunciata in Sezione IV, è quella di suddividere la fenditura, che ha apertura  $a$ , in tanti (infiniti) intervallini molto piccoli (infinitesimi) ai quali applicare il metodo usato per calcolare la diffrazione dal reticolo presentato in Appendice I. Idealmente, quindi, si ha  $a$  che fare con un numero  $N \rightarrow \infty$  di piccole (infinitesime) aperture la cui spaziatura  $d$  tende a zero, mantenendo  $Nd = a$ .

Suddividiamo allora la fenditura in tanti elementini di lunghezza infinitesima  $dx$  (l'asse  $X$  corre sul piano dell'apertura e ha origine nell'estremo "alto" dell'apertura stessa, come in Fig. 9). A ognuno di questi elementini, che si comporterà da sorgente secondo il principio di Huygens, associamo una "densità lineare" di ampiezza di onda pari a  $E_0/a$ .

Ragionando in maniera simile a quanto fatto in Appendice I, potremo scrivere l'ampiezza (in forma complessa) del campo elettrico su un punto dello schermo, che dista  $D \gg a$  dal piano della fenditura, sotto forma di integrale:

$$E = \int_0^a \frac{E_0}{a} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] dx = \quad (22)$$

$$= E_0 \exp(-i\omega t) \exp(ikr_0) \int_0^a \frac{\exp[ik(r - r_0)]}{a} dx \quad (23)$$

dove la simbologia, costruita in analogia con Eq. 13, dovrebbe essere autoesplicitiva così come dovrebbero risultare chiari i vari passaggi.

Occupiamoci del solo integrale, che rappresenta l'aspetto di interesse. facciamo un cambio di variabile passando alla variabile  $\zeta = (r - r_0)$ , che rappresenta la differenza di cammino ottico. Essa dipende dalla posizione  $x$  lungo la fenditura: usando tutte le approssimazioni già ampiamente discusse, si ottiene  $\zeta \simeq x \sin \xi \simeq x \sin \theta$ , dove l'angolo  $\theta$  è definito in analogia con le derivazioni discusse in precedenza. Si ha quindi  $dx = d\zeta / \sin \theta$ ; inoltre gli estremi di integrazione diventano 0 e  $a \sin \theta$ . In definitiva si ha

$$\int_0^a \frac{\exp[ik(r - r_0)]}{a} dx = \quad (24)$$

$$= \int_0^{a \sin \theta} \frac{\exp(ik\zeta)}{a \sin \theta} d\zeta = \quad (25)$$

$$= \frac{\exp(ika \sin \theta) - 1}{ika \sin \theta} = \quad (26)$$

$$= \exp(ika \sin \theta/2) \times \quad (27)$$

$$\times \frac{\exp(ika \sin \theta/2) - \exp(-ika \sin \theta/2)}{ika \sin \theta}, \quad (28)$$

dove nei vari passaggi abbiamo calcolato l'integrale e fatto qualche altra piccola manipolazione matematica.

Ricordiamo che ci interessa determinare l'*intensità* dell'onda ottenuta per sovrapposizione sullo schermo. Dobbiamo quindi considerare l'andamento del modulo quadro del campo elettrico. Tenendo conto che i termini a

modulo unitario messi in evidenza nelle Eqs. 22, 24 non hanno alcun ruolo, si ottiene facilmente

$$I(\theta) \propto \left| \frac{\exp(ika \sin \theta/2) - \exp(-ika \sin \theta/2)}{2ka \sin \theta/2} \right|^2 = \quad (29)$$

$$= \frac{\sin^2(ka \sin \theta/2)}{(ka \sin \theta/2)^2}. \quad (30)$$

Considerando che, al solito,  $k = 2\pi/\lambda$ , si trova infine

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2(\pi a \sin \theta/\lambda)}{(\pi a \sin \theta/\lambda)^2}, \quad (31)$$

che è quanto annunciato in Eq. 9, dove si era posto  $\alpha = \pi a \sin \theta/\lambda$ .

---

[1] Il cammino ottico è il prodotto tra distanza percorsa e indice di rifrazione del mezzo in cui l'onda si propaga.

Qui supponiamo di essere nel vuoto, per cui cammino e cammino ottico coincidono.