

Ciclo di isteresi e sua visualizzazione

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 2 - FF, 15 aprile 2015)

Questa nota serve per illustrare alcuni aspetti non del tutto ovvi dell'esperienza di laboratorio finalizzata a visualizzare un ciclo di isteresi di un materiale ferromagnetico sull'oscilloscopio usato in modalità X-Y. L'interpretazione dell'esperienza prevede diversi passaggi concettuali che qui vengono presi in considerazione uno per uno. Prima di questo, si richiamano brevemente pochi concetti fisici di base che riguardano il ciclo di isteresi in materiali ferromagnetici.

I. CICLO DI ISTERESI DI UN MATERIALE FERROMAGNETICO

Come è ben noto, i materiali ferromagnetici hanno spiccate proprietà di carattere magnetico, cioè la loro presenza è in grado di modificare sostanzialmente valori (e direzioni) dei campi vettoriali rilevanti per la descrizione dei fenomeni magnetostatici.

Non è certamente questa la sede per entrare nei dettagli di argomenti che fanno ampia parte dei corsi di "Fisica 2", però vale la pena di ricordare che, per motivi pratici, conviene introdurre i tre campi vettoriali \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} , regolati dalla relazione $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto (il valore di questa costante è, nel nostro sistema di unità di misura, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A). Il campo di magnetizzazione \vec{M} può essere messo in relazione con la presenza di momenti magnetici \vec{p}_m nel materiale: $\vec{M} = \lim_{\Delta V} \frac{\Delta N}{\Delta V} \langle \vec{p}_m \rangle$, dove il passaggio al limite consiste nel considerare volumetti ΔV tendenti a zero e contenenti ΔN momenti di dipolo magnetico, e il bra-ket indica un'operazione di media sull'ensemble, cioè sul sistema di momenti magnetici considerati.

L'utilità dell'impiego dei tre campi vettoriali può essere compresa ponendo $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_m$, dove \vec{j} e \vec{j}_m sono le densità superficiali della corrente "vera e propria", che in genere scorre intenzionalmente in un qualche conduttore, e della corrente associata (o associabile) ai fenomeni di magnetizzazione della materia. In un ipotetico esperimento, o situazione fisica, possiamo quindi supporre che \vec{H} sia determinato da correnti note e ben controllate, mentre \vec{M} ha a che fare con la risposta del sistema materiale considerato all'applicazione di \vec{H} , ovvero tiene conto delle proprietà magnetiche intrinseche del materiale.

Trattare questi fenomeni dal punto di vista microscopico è generalmente molto complicato. In primo luogo, l'aggettivo "microscopico" assume in questo ambito un significato particolare, dato che, per esempio, il volumetto ΔV introdotto sopra non può, nella realtà, essere considerato piccolo a piacere, essendo limitato da scale dimensionali tipiche dei fenomeni che si stanno considerando. Per semplificare la trattazione, si possono poi fare alcune approssimazioni, consistenti nel considerare materiali *omogenei e isotropi* e nel supporre la seguente relazione *lineare* tra i campi: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. La costante scalare

adimensionata χ_m (normalmente nota come *suscettività magnetica*) misura proprio la risposta del materiale al campo \vec{H} che vi è applicato. Unendo le relazioni di definizione scritte sopra, si trova facilmente che, nelle ipotesi fatte, si ha $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, con $\mu_r = 1 + \chi_m$ *permeabilità magnetica* del materiale.

A. Ferromagneti

Nella maggioranza dei materiali $\chi_m \approx 0$, con un segno positivo o negativo a seconda del carattere *para-* o *diamagnetico*. Di conseguenza gli effetti in termini magnetici della maggioranza dei materiali sono estremamente ridotti, benché i fenomeni che ne derivano siano estremamente importanti in molti settori della fisica della materia. In altre parole, la misura, ovvero la semplice verifica, delle proprietà magnetiche della materia per diamagneti e paramagneti non può essere condotta con i metodi tipici del nostro corso, a causa principalmente del ridotto rapporto segnale/rumore tipico per le misure elettriche macroscopiche. Completamente diverso è il caso dei materiali classificati come *ferromagnetici* (ad esempio, materiali ferrosi o contenenti Ni, Co, alcuni ioni di terre rare, e poco altro, di naturale o artificiale). Qui χ_m , e quindi μ_r , che hanno generalmente segno positivo, possono assumere valori anche di parecchie decine di migliaia e quindi dare luogo a effetti ben visibili anche con semplici misure elettriche macroscopiche.

Nei ferromagneti l'eclatante valore di μ_r comporta un altrettanto eclatante aumento dell'intensità del campo \vec{B} rispetto al vuoto (o a materiali non ferromagnetici) oltre a diverse altre conseguenze, tra cui il cosiddetto fenomeno di "canalizzazione" delle linee di \vec{B} all'interno del materiale (può essere facilmente dimostrato a partire dalle condizioni di continuità delle componenti ortogonali di \vec{B} e tangenziali di \vec{H}).

Accanto a tutto questo, normalmente si ha anche un altro importante effetto: la relazione di linearità tra i campi che abbiano prima supposto non è più verificata, o, perlomeno, è verificata in termini di definizione solo assumendo che χ_m e μ_r siano una *funzione*, parecchio complicata e non univocamente determinata, dell'intensità H . Infatti sperimentalmente si osserva che l'andamento di M in funzione di H ha un comportamento peculiare. Se si suppone che inizialmente tutti e due i campi

siano nulli, all'aumentare di H si osserva inizialmente un aumento di M che poi si arresta tendendo a una sorta di valore limite, di *saturazione*. La saturazione può essere qualitativamente interpretata come dovuta al fatto che *tutti* (o quasi) i dipoli magnetici elementari presenti nel materiale e disponibili per il processo si sono allineati con la direzione di \vec{H} per minimizzare l'energia di configurazione. Inoltre se si fa diminuire H si osserva che M non ripercorre l'andamento iniziale, ma se ne discosta disegnando quello che si chiama un *ciclo di isteresi*.

Si potrebbe parlare a lungo dell'isteresi. Qui limitiamoci a notare che la presenza di un ciclo di isteresi, la cui "ciccionaggine" dipende dallo specifico materiale considerato (l'isteresi è "secca" per il ferro dolce, "cicciona" per materiali destinati a realizzare magneti permanenti, tipo il permalloy), implica una "dissipazione" di energia. Infatti l'area racchiusa nel ciclo è proporzionale all'energia magnetica nel volume del materiale. Spesso qui, come in altre situazioni che coinvolgono materiali "reali", il dispendio di energia è legato a una sorta di transizione di fase solido-solido che conduce a un riarrangiamento strutturale della materia.

Molto spesso il fenomeno dell'isteresi è rappresentato da grafici di B in funzione di H , come mostrato in Fig. ??(a) (tratta da <http://www.larapedia.com/elettrotecnica>). Avendo stabilito in precedenza un semplice legame di somma tra le intensità dei vari campi e tenendo conto dell'elevato valore di μ_r , un grafico di questo tipo ha all'incirca lo stesso andamento discusso in precedenza. L'unica differenza notevole è che, a saturazione, invece di avere un andamento costante si ha una continua lieve crescita lineare di B in funzione di H . Infatti a saturazione $\mu_r \rightarrow 1$, per cui $B \rightarrow \mu_0 H$. Con le scale normalmente adottate, questo aumento è di fatto invisibile.

B. Campo rimanente e coercivo

Oltre all'indicazione di B_s (*campo di saturazione*), la figura riporta alcuni punti caratteristici del ciclo di isteresi, corrispondenti in particolare ai valori B_r (*campo rimanente*) e H_C (*campo coercivo*?). Notate che nella curva disegnata in figura si suppone che il ciclo di isteresi sia simmetrico rispetto allo zero, cosa che non sempre si verifica.

Il perché questi punti abbiano un ruolo speciale è abbastanza immediato da capire. B_r rappresenta l'intensità del campo di induzione magnetica che il materiale produce in assenza di campo esterno (è un magnete permanente). H_C rappresenta l'intensità del campo magnetico da applicare se si vuole che la magnetizzazione rimanente inverta il suo segno (cioè per costringere il materiale a cambiare il verso della propria magnetizzazione).

I valori tipici del campo rimanente, che ha un'utilità pratica, dipendono dallo specifico materiale considerato e dalle sue dimensioni. Per un materiale ferroso di dimensioni macroscopiche B_r può essere dell'ordine delle

decine di Gauss e la saturazione corrisponde a campi di induzione magnetica delle centinaia di Gauss. In un disco rigido, dove la magnetizzazione di piccoli pezzettini (domini) di ferromagneti permette l'immagazzinamento dell'informazione, i valori sono parecchi ordini di grandezza più bassi, visti i piccoli volumetti di materiale in gioco (pensate se ridurre quanto più possibile tali volumetti può comportare qualche problema pratico).

La Fig. ??(b) mostra l'andamento nella fase iniziale del ciclo, quando B viene fatto passare dal valore iniziale (supposto pari a $\mu_0 H$, cioè a zero, se $H = 0$) alla saturazione. Inoltre è mostrato un comportamento realistico per la permeabilità $\mu = \mu_r \mu_0$, che in genere assume un valore massimo μ_{max} in corrispondenza di un certo valore di H , per poi tendere a μ_0 quando ci si avvicina alla saturazione. Come già anticipato, è evidente che μ_r (ovvero χ_m) non ha un valore costante nel ciclo.

Tuttavia nella pratica si introduce spesso un valore univoco μ_r per il materiale considerato, definito come $\mu_r = B_r / (\mu_0 H_c)$. Questa definizione ha una motivazione. Come già affermato, l'area racchiusa nel ciclo di isteresi è proporzionale alla densità di energia $u_{m,ist}$ immagazzinata (ovvero spesa nel processo) all'interno del materiale. Nella maggior parte dei cicli, $u_{m,ist} \sim 4H_c B_r$ (se guardate il grafico, potete intuire che l'area del ciclo è data da 4 volte l'area del rettangolo $H_c B_r$) che, con la definizione appena data di μ_r , si può scrivere nella forma, compatta e facile da ricordare, $4B_r^2 / (\mu_0 \mu_r)$.

II. MISURARE, O VISUALIZZARE, IL CICLO DI ISTERESI

Per misurare il ciclo di isteresi è necessario: (i) poter applicare un campo \vec{H} la cui intensità H sia variabile in modo controllato; (ii) poter misurare l'intensità B di \vec{B} all'interno del materiale. Se il primo requisito è abbastanza facile da soddisfare (basta prendere una bobina di cui sia noto il campo in funzione della corrente, e inviargli una corrente variabile in modo controllato), il secondo è più complicato.

Un modo brillante per misurare B è rappresentato dai metodi basati sull'induzione magnetica, cioè dai metodi, che ben conoscete, basati sulla cosiddetta legge di Faraday. Infatti, usando campi *oscillanti*, su una bobina di sonda si crea una forza elettromotrice proporzionale alla (*variazione*) del flusso di \vec{B} che passa nella sezione della bobina di sonda stessa. Dunque se il materiale si trova all'interno della bobina di sonda e la geometria è tale da poter stimare facilmente la relazione tra B e $\Phi(\vec{B})$, c'è la speranza di poter risalire alla misura di B dentro il materiale.

Concettualmente è tutto bello e facile, però esistono delle difficoltà. Infatti misurare la variazione del flusso non è la stessa cosa di misurare il flusso. Se potessimo però integrare nel tempo il primo e il secondo membro della legge di Faraday, avremmo, supponendo ovviamente costante la superficie su cui si determina il flusso,

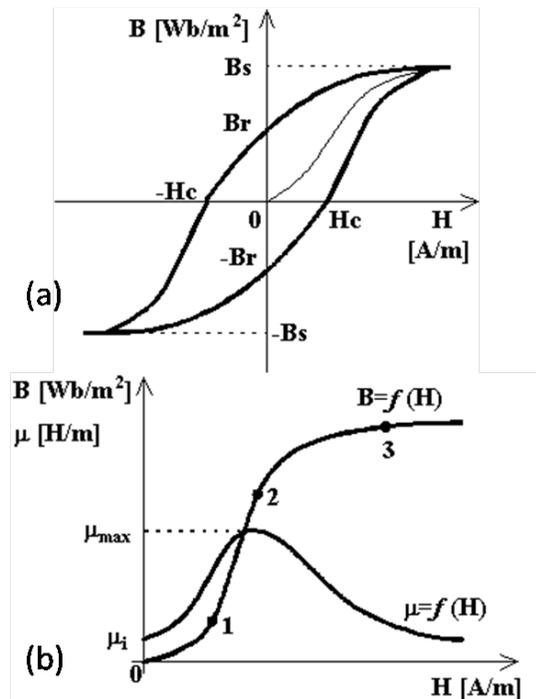


Figura 1. Rappresentazione qualitativa del ciclo di isteresi B vs H per un materiale ferromagnetico con indicazione dei punti caratteristici del ciclo (a); rappresentazione qualitativa della fase iniziale del ciclo e dell'andamento corrispondente di $\mu = \mu_0 \mu_r$ (b).

$\int fem(t)dt = \Phi(\vec{B})$, cioè potremmo ricavare una misura del flusso di \vec{B} , e dunque di B . Notate che nel secondo membro è stato intenzionalmente omissa il segno meno, dato che il segno della forza elettromotrice sulla bobina di sonda è di fatto arbitrario (dipende, come ben sapete, dal senso di avvolgimento delle spire che compongono la sonda), dunque irrilevante ai nostri fini.

Pensiamo a un metodo semplice per implementare praticamente questa idea, introducendo dove possibile qualche altra belluria:

- la forza elettromotrice indotta nella sonda dà luogo a una differenza di potenziale, cioè un “segnale”, oscillante, che di seguito chiamerò $V_2(t)$ (il pedice 2 fa riferimento al fatto che si tratta del “secondario” di un ipotetico circuito costituito dalle bobine che creano \vec{H} e che misurano $\Phi(\vec{B})$). Questo segnale può essere integrato temporalmente in vari modi, il più semplice dei quali è quello che prevede l'uso di un integratore RC. Collegare un integratore RC a una bobina, che è inevitabilmente dotata di una propria induttanza L , rende abbastanza complicato stabilire il comportamento del circuito. Però possiamo sempre supporre di operare in condizioni in cui l'impedenza dell'induttore (la bobina del secondario, cioè quella che serve per sondare) sia trascurabile rispetto alle impedenze di resistore e condensatore, come si ottiene a frequenze sufficientemente

basse (la parte reattiva dell'impedenza è $j\omega L$, che tende a zero per $\omega \rightarrow 0$).

- Possiamo ideare qualche ulteriore miglioria al nostro sistema di verifica della curva di isteresi. Per esempio possiamo separare spazialmente la regione dove si produce il campo \vec{H} da quella dove si misura $\Phi(\vec{B})$. Questo comporta un immediato vantaggio pratico: le correnti parassite indotte nel materiale sotto analisi sono in questo caso meno importanti, dato che esse saranno presenti soprattutto nella regione di produzione, dove il campo è più intenso. Dunque l'effetto di “schermatura” dei campi, che è tipicamente associato alla presenza di correnti parassite, sarà meno rilevante. Inoltre potremo ridurre ulteriormente gli effetti utilizzando un campione di materiale che ha la forma di una lamina sottile, dove le correnti parassite scorrono con “difficoltà”.
- Allo scopo possiamo pensare di utilizzare due bobine distinte, dette bobina 1 e bobina 2, e sfruttare per la nostra misura il trasferimento del flusso da una all'altra grazie al fenomeno della canalizzazione delle linee di campo all'interno del materiale ferromagnetico. Ovviamente due bobine poste a piccola distanza tra loro hanno anche un accoppiamento magnetico “spontaneo”, come ben testimoniato dalle vostre misure di mutua induzione fatte in precedenza. Qui supporremo che questo accoppiamento sia *trascurabile*.
- Per aumentare l'accoppiamento dovuto alla presenza del materiale e per rendere facile e piuttosto accurata la determinazione di H faremo uso di un *circuito magnetico* costituito dal materiale di cui vogliamo visualizzare l'isteresi, cioè disporremo tante lamine di questo materiale in modo da creare una linea chiusa (una catena di lamine).
- Infine notiamo un altro aspetto importante dell'approccio che stiamo disegnando. Usando un campo di intensità H oscillante, cioè una funzione del tempo $H(t)$ che va per esempio come un seno o un coseno, avremo la possibilità di variare *continuativamente* l'intensità H tra un valore minimo e un valore massimo. Inviando un segnale V_H proporzionale a H al canale CH1 dell'oscilloscopio, avremo la possibilità di visualizzare direttamente la curva di isteresi usando la modalità X-Y dell'oscilloscopio stesso, purché si mandi a CH2 un segnale V_B proporzionale a B .

Facendo riferimento all'esperienza pratica di laboratorio, vediamo un po' più in dettaglio come interpretare i risultati e costruire un minimo di matematica per spiegare il suo funzionamento. La bobina 1 è collegata a un generatore di funzioni che produce un'onda sinusoidale a frequenza f . Poiché usiamo un circuito magnetico “chiuso”, possiamo integrare sulla superficie i due membri dell'equazione (“di Maxwell”) $\vec{\nabla} \times \vec{H}(t) = \vec{j}(t)$, otte-

nendo $\oint \vec{H}(t) \cdot d\vec{\ell} = I_{conc}(t)$, dove $I_{conc}(t)$ rappresenta l'intensità della corrente concatenata alla linea chiusa di circuitazione. Notate che, pur se siamo in presenza di correnti e campi variabili nel tempo, supponiamo che questi evolvano in tempi caratteristici sufficientemente lunghi da permettere l'approssimazione *quasi-stazionaria*, che è sicuramente molto ben verificata operando a frequenze $f \sim 100$ Hz, come suggerito di fare in laboratorio.

Detta ℓ la lunghezza (media) del circuito magnetico, che naturalmente dal punto di vista sperimentale potrà essere determinata solo con una rilevante incertezza, $I_1(t)$ la corrente che fluisce nella bobina 1 e N_1 il suo numero di spire, l'integrazione fornisce $H(t) = N_1 I_1(t)/\ell$. Data l'approssimazione quasi-stazionaria, questa relazione vale anche tra le ampiezze (o ampiezze picco-picco): $H = N_1 I_1/\ell$. La misura della corrente può essere convenientemente fatta montando una resistenza R_1 in serie alla bobina. Trascurando la resistenza interna del generatore e l'impedenza della bobina, si ha infatti in queste condizioni $I_1 = V_H/R_1$, dove con V_H abbiamo indicato l'ampiezza (o ampiezza picco-picco) della differenza di potenziale ai capi della resistenza R_1 .

Mettendo tutto insieme, si ha quindi

$$V_H = \frac{\ell R_1}{N_1} H, \quad (1)$$

cioè l'ampiezza (o ampiezza picco-picco) del segnale V_H è direttamente proporzionale all'intensità (o intensità picco-picco) del campo oscillante H , costituendone una misura indiretta.

Nelle ipotesi di isotropia, omogeneità e linearità che abbiamo citato all'inizio, all'interno del materiale questo campo $\vec{H}(t)$ dà luogo a un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t) = \mu_r \mu_0 \vec{H}(t)$. Per il fenomeno della canalizzazione delle linee di campo, la sua direzione sarà (prevalentemente) allineata con il lato lungo delle lamine che costituiscono la catena, ovvero il circuito magnetico.

Questo significa che all'interno della bobina 2 si avrà un flusso di campo magnetico oscillante $\Phi(\vec{B}(t)) = hsB(t)$, dove h ed s sono "altezza" e spessore delle lamine (occhio alla geometria). Ovviamente l'espressione scritta è un'approssimazione: a parte gli aspetti geometrici (non è affatto detto, per esempio, che il campo $\vec{B}(t)$ sia omogeneo dentro la lamina), è possibile che ci siano perdite di campo dal circuito magnetico, imperfetto in quanto reale, così come è possibile che ci sia un contributo dovuto alla mutua induzione "spontanea" tra le bobine o alle correnti parassite. Tutto questo lo consideriamo *trascurabile*.

Nell'esperienza pratica, la bobina 2 è collegata a un circuito integratore costituito da una resistenza R_2 e un condensatore C . Ora, tutti ricordate che un integratore è un filtro passa-basso la cui *frequenza di taglio* $f_T = 1/(2\pi R_2 C)$ è molto minore della frequenza di lavoro f . In altre parole, affinché l'integratore si comporti in modo opportuno dovete scegliere R_2 e C tali che $R_2 C \gg 1/(2\pi f)$: nelle mie prove io ho posto $R_2 = 3.3$ kohm (nominali) e $C = 10\mu\text{F}$ (nominali). Lavorando a $f \approx 100$ Hz la condizione è abbastanza ben verificata, dato che la frequenza di taglio è circa 20 volte inferiore

alla frequenza di lavoro. Ricordate poi tutti che all'uscita dell'integratore il segnale ha un'ampiezza pari a $f_T/f = 1/(f2\pi R_2 C)$ volte quella del segnale in ingresso (il filtro passa-basso attenua pressoché linearmente con la frequenza le componenti sotto alla frequenza di taglio). Di conseguenza, si ha in uscita dall'integratore un segnale la cui ampiezza è

$$V_B = V_2 \frac{1}{2\pi f R_2 C}. \quad (2)$$

D'altra parte, come già affermato, si ha anche

$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi(\vec{B}(t))}{dt} = N_2 2\pi f h s B, \quad (3)$$

dove abbiamo notato che il flusso attraversa la sezione delle N_2 spire (messe in serie tra loro) che formano la bobina 2 e abbiamo fatto la derivata di una grandezza sinusoidale con frequenza angolare $\omega = 2\pi f$ (e, al solito, abbiamo trascurato i segni, che sono irrilevanti). Mettendo tutto insieme, si ha

$$V_B = \frac{N_2 2\pi f h s}{2\pi f R_2 C} B = \frac{N_2 h s}{R_2 C} B, \quad (4)$$

che quindi rappresenta una misura indiretta di B , che è quello che volevamo ottenere.

Se i segnali V_H e V_B vengono inviati ai canali CH1 e CH2 di un oscilloscopio usato in modalità X-Y, allora si ottiene la visualizzazione diretta della relazione tra intensità del campo di induzione magnetica \vec{B} e intensità del campo "esterno" (applicato) \vec{H} *al variare* di quest'ultima. Infatti nel periodo $T = 1/f$ l'intensità di \vec{H} viene continuamente spazzata tra un valore minimo (pari a $H_{min} = -V_H(N_1/(R_1\ell))$) e un valore massimo (pari a $H_{max} = +V_H(N_1/(R_1\ell))$). Nel frattempo il campo di induzione magnetica viene continuamente misurato attraverso la misura di V_B e dunque si ricostruisce una rappresentazione, almeno qualitativamente corretta, della curva di isteresi. Il risultato è più convincente quanto più alto è il massimo valore dell'intensità H applicata al materiale: una forma ragionevolmente simile a un ciclo di isteresi si ottiene in effetti solo alimentando la bobina 1 con un trasformatore (dunque con un segnale quasi sinusoidale alla frequenza della rete, $f = 50$ Hz) con secondario da $24 V_{rms}$. La corrente prodotta da questo trasformatore è in grado di generare un campo H che è dell'ordine, o addirittura supera, il valore necessario per saturare la magnetizzazione del materiale impiegato.

Valutando le differenze di potenziale corrispondenti ai punti critici (campi coercivi e residui) e utilizzando appropriatamente il modello presentato, si possono addirittura eseguire delle stime dei parametri rilevanti, in particolare della permeabilità magnetica relativa del materiale impiegato. Naturalmente le molte approssimazioni introdotte e il metodo stesso spingono a considerare con cautela queste stime e, in ogni caso, a valutare serenamente (cioè senza paura di esagerare) la loro incertezza.