# Moto ed equazioni differenziali

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

October 30, 2004

Lo scopo finale di questa nota è fornire alcune informazioni sulla soluzione pratica di equazioni del moto per semplici fenomeni oscillatori.

**Moto armonico.** Il moto armonico rappresenta un moto periodico oscillatorio. La legge del moto armonico può essere derivata a partire da quella del *moto circolare uniforme*, considerando la *proiezione del punto* che compie il moto circolare su un asse, ad esempio l'asse $X$.

Descriviamo il moto circolare uniforme in un sistema di riferimento con coordinate polari, $r, \theta$. Su questo sistema di riferimento sovrapponiamo anche un sistema di coordinate cartesiane $x, y$ (ovviamente il moto avviene su un piano, quello a cui appartiene la circonferenza) con l'origine nel centro della circonferenza. Se indichiamo con $\omega$ ed $R$ la velocità angolare ed il raggio della circonferenza, e supponiamo che all'istante $t = 0$ il punto intercetti l'asse $X$ (misuriamo gli angoli a partire dall'asse $X$, con la convenzione che essi siano positivi se la rotazione avviene in senso antiorario), allora nel sistema di riferimento polare il moto del punto è descritto dalle leggi: $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega t$. In coordinate cartesiane, lo stesso moto è descritto dalle leggi:

$$x(t) = R\cos(\omega t) \; ; \qquad y(t) = R\sin(\omega t) \; . \tag{1}$$

Queste leggi si possono desumere direttamente dalle definizioni trigonometriche di seno e coseno, ovvero ricordando le relazioni che intercorrono tra componenti nei diversi sistemi di coordinate. Il loro andamento temporale rappresenta un'**oscillazione**, con *pulsazione* $\omega$ (e quindi frequenza $\nu = \omega/2\pi$ e periodo $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$, che si svolge attorno all'origine con ampiezza pari ad $R$ (cioè la posizione si muove attorno allo zero, ed ha come estremi i punti di ritorno $\pm R$). Poiché stiamo considerando un'unica frequenza di oscillazione, l'oscillazione stessa si dice *monocromatica*.

Notate che le relazioni di Eq.1 possono essere anche interpretate come le *componenti cartesiane* del vettore $\vec{R(t)}$ che rappresenta la posizione istantanea del punto sulla circonferenza. Notate anche che, formalmente, le componenti $R_x(t) = x(t)$ ed $R_y(t) = y(t)$ sono diverse fra loro per uno "sfasamento"di $\pi/2$. Infatti, se aggiungiamo una **fase costante** $\Phi = \pi/2$ all'argomento della funzione coseno che rappresenta la $x(t)$ otteniamo l'espressione della $y(t)$ (ricordate che $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$). D'altra parte, questa operazione significa che il punto, all'istante $t = 0$, invece di trovarsi nella posizione angolare $\theta = 0$ si trova in $\theta = \pi/2$, cioè esattamente sull'asse $Y$, per come abbiamo costruito il nostro sistema di riferimento.

Visto che le leggi del moto lungo $X$ e lungo $Y$ sono formalmente "simili", cioè non si impara granché di nuovo se si considera la $y(t)$ invece che la $x(t)$, ci restringiamo a considerarne una sola, ad esempio quella lungo $X$. Osservate che anche velocità ed accelerazione hanno leggi orarie, che indichiamo rispettivamente con $v_x(t)$ e $a_x(t)$, che sono di tipo oscillatorio. A questa conclusione si può arrivare in due modi diversi. Il primo è di tipo grafico, e ricalca la procedura seguita per trovare la legge oraria dello spostamento. Consideriamo, infatti, il vettore velocità $\vec{v}$ di un punto che si sta muovendo di moto circolare uniforme; essendo tangente punto per punto alla traiettoria, cambia continuamente la sua direzione, mantenendo inalterato il modulo, che vale $\omega R$. Pensate ora di traslare rigidamente i vettori $\vec{v}$ che rappresentano la velocità istante per istante in modo che la loro origine coincida con l'origine del sistema di riferimento (questa operazione non altera né il modulo, né la direzione, né il verso dei vettori). Vi potrete rendere conto facilmente che $\vec{v}$ *ruota* con la stessa velocità angolare di $\vec{R}$, trovandosi sempre "sfasato" di $\pi/2$ rispetto ad $\vec{R}$. Ad esempio, all'istante $t = 0$ $\vec{R}$ è diretto lungo l'asse $X$, mentre $\vec{v}$ è diretto lungo l'asse $Y$, dopo un quarto di giro (cioè dopo un intervallo di tempo pari ad un quarto di periodo) $\vec{R}$ è diretto lungo $Y$, e $\vec{v}$ è diretto verso la direzione negativa dell'asse $X$, e così via. Allora, per la componente lungo $X$ di $\vec{v}$, che indichiamo con $v_x(t)$, vale $v_x(t) = |\vec{v}|\cos(\omega t + \pi/2) = -\omega R \sin(\omega t)$. Per quanto riguarda la componente $a_x$ dell'accelerazione, poi, la derivazione è ancora più semplice. Infatti nel moto circolare uniforme $\vec{a}$ è *centripeta*, e quindi ha sempre la stessa direzione di $\vec{R}$ ma verso opposto. In altre parole, $\vec{a}$ è sfasato di $\pi$ rispetto ad $\vec{R}$, e per la componente $X$ si ha: $a_x(t) = |\vec{a}|\cos(\omega t + \pi) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$, dove abbiamo usato $|\vec{a}| = \omega^2 R$.

L'altro modo di procedere prevede di utilizzare le definizioni "formali" di velocità ed accelerazione istantanee: $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$. Ricordando le regole relative alla derivazione delle funzioni trigonometriche, si ottengono i risultati già scritti.

Riassumendo, e notando che $\frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ (si dice "derivata seconda"), si ha, per il moto armonico che abbiamo considerato:

$$x(t) = R\cos(\omega t) \tag{2}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega R\sin(\omega t) \tag{3}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 R\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)\ , \tag{4}$$

dove l'ultimo passaggio è ovvio considerando l'espressione della $x(t)$.

**Equazioni differenziali del secondo ordine.** Quanto scritto nelle equazioni qui sopra per la funzione $x(t)$ può essere facilmente generalizzato ad una qualsiasi funzione $f(t)$. In particolare, l'espressione $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -Af(t)$, con $A$ costante reale e *positiva*, che è praticamente una riscrittura dell'ultima riga di quanto sopra, rappresenta un'**equazione differenziale di secondo ordine omogenea** per la funzione $f(t)$. Notate che il termine "secondo ordine" si riferisce al fatto che vi compare una derivata seconda, mentre il termine "omogenea" significa che non non ci sono termini costanti, cioè di "grado zero" rispetto all'operatore derivata di $f(t)$. Ovviamente, per rispettare la coerenza dimensionale dell'equazione, occorre che le dimensioni di $A$ siano quelle giuste ($[\mathrm{t}]^{-2}$).

La soluzione di questa equazione differenziale, cioè la funzione $f(t)$ che la soddisfa, si può determinare facilmente ragionando a ritroso; se sopra siamo partiti dalla $f(t)$ (cioè dalla $x(t)$!) per trovare la derivata seconda rispetto a $t$, ora facciamo il percorso inverso, e concludiamo che la soluzione deve essere del tipo coseno. Infatti, in termini generali essa assume la forma:

$$f(t) = B\cos(\sqrt{A}t + \Phi)\ ; \tag{5}$$

Notate che nel moto armonico $A = \omega^2$, e quindi $\sqrt{A}$ è la pulsazione del moto $\omega$.

I termini $B$ (che deve avere le stesse dimensioni di $f(t)$) e $\Phi$ (che è una variabile angolare, e quindi adimensionata, a cui diamo il nome di **fase costante**) meritano una discussione. La matematica ci insegna che per determinare completamente la soluzione di un'equazione differenziale di un dato ordine occorre esprimere un numero di **condizioni iniziali** (dette anche "condizioni al contorno") pari all'ordine dell'equazione differenziale. Nel caso dell'equazione del moto, che è di secondo ordine, le condizioni iniziali sono date dalla velocità e dalla posizione iniziale. Nell'esempio del moto armonico trattato sopra, abbiamo implicitamente posto uguale a $R$ la posizione iniziale ($x(t = 0) = R$) ed uguale a zero la velocità iniziale ($v_x(t = 0) = 0$). Potete rendervi conto facilmente del fatto che, con una scelta diversa, il risultato sarebbe stato differente. I termini $B$ e $\Phi$ servono proprio per fare in modo che la soluzione possa rispettare le condizioni iniziali sul valore della funzione $f_0$, e su quello della sua derivata prima, $\frac{df}{dt}|_{t=0}$ (l'ultima scrittura significa il valore a $t = 0$ della derivata di $f(t)$). In termini generali, essi si trovano proprio imponendo: $f(t=0) = f_0$ e $\frac{df(t=0)}{dt} = \frac{df}{dt}|_{t=0}$.

**Forza elastica ed oscillazioni.** La forza elastica rappresenta un valido esempio di applicazione di quanto abbiamo descritto. Una massa $m$ sottoposta all'azione di una molla lungo l'asse $X$ (caso unidimensionale) subisce una forza che ha espressione: $F = -k(x - x_{riposo})$, dove $k$ è la costante elastica ed $x_{riposo}$ è la posizione che la massa assume quando la molla è in *posizione di riposo*. Per semplificare il procedimento (e comunque vedremo poi come ci si può comportare in situazioni generiche), supponiamo di scegliere l'origine dell'asse $X$ in modo che $x_{riposo} = 0$.

Ricordano la legge di Newton, che, nel caso unidimensionale, è $F = ma$, possiamo scrivere l'equazione del moto come:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \ . \tag{6}$$

Questa è proprio un'equzione differenziale omogenea del secondo ordine, che ha la soluzione che abbiamo detto prima. In particolare, è facile verifcare che, se le condizioni iniziali sono $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = 0$ (abbiamo esteso la molla fino alla posizione $x_0$ e lasciamo andare la massa senza impartirle una velocità iniziale), la soluzione è: $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{k/m}$. Il moto è oscillatorio, con la pulsazione indicata ed ampiezza pari a $x_0$.

Consideriamo ora un'altra scelta per le condizioni iniziali, per esempio $x(t=0) = 0$ e $v(t=0) = v_0$ (in pratica facciamo partire la massa dalla posizione di riposo della molla, imprimendole una certa velcoità iniziale). La soluzione generica è $x(t) = B\cos(\omega t + \Phi)$, sempre con $\omega = \sqrt{k/m}$, e per trovare i valori dei parametri $B$ e $\Phi$ dobbiamo imporre le condizioni al contorno: $x(t=0) = B\cos(\Phi) = x_0 = 0$ e $\frac{dx(t=0)}{dt} = -\omega B \sin(\Phi) = v_0$. Per soddisfare la prima condizione al contorno, escludendo la soluzione banale $B = 0$, che è priva di significato fisico, deve essere $\Phi = \pi/2$ (più correttamente $\Phi = \pi/2 + N\pi$, con $N$ intero, e *scegliamo* $N = 1$); ponendo questo valore nell'espressione relativa alla seconda condizione, troviamo $B = -v_0/\omega$. Quindi la soluzione specifica per le condizioni iniziali considerate è: $x(t) = -(v_0/\omega)\cos(\omega t + \pi/2) = (v_0/\omega)\sin(\omega t)$. Essa rappresenta ancora una oscillazione con pulsazione $\omega$, ampiezza $v_0/\omega$ e posizione iniziale zero. Provate da soli a risolvere casi con altre condizioni iniziali.

**Equazioni non omogenee.** Prendiamo il sistema massa e molla di prima, e disponiamolo in direzione verticale (chiamiamo $Z$ l'asse verticale ed orientiamolo verso il basso, e supponiamo la sua origine coincidente con la posizione di riposo della molla). Tenendo conto della forza peso, l'equazione del moto diventa in questo caso:

massa al primo membro corretta 2411/04 su osservazone di attento studente

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -kz(t) + mg \ . \tag{7}$$

Vedete che la forza peso ha reso **non omogenea** l'equazione, essendo comparso il termine $mg$. La matematica insegna che, per un'equazione differenziale *di qualsiasi ordine* non omogenea, la soluzione generale è data dalla *somma* della soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata (quella che si ottiene togliendo il termine costante, cioè, praticamente, Eq.6), con *una soluzione particolare* dell'equazione non omogenea stessa. Quindi dovremo sommare alla funzione $z_{omo}(t) = B\cos(\omega t + \Phi)$ una (qualsiasi) soluzione particolare. È molto semplice trovare una soluzione particolare: ad esempio, possiamo cercare la soluzione che si ha quando l'accelerazione è nulla, cioè la $z_{part}$ che risolve l'equazione: $0 = -kz_{part} + mg$. Vedete che quest'ultima equazione è di tipo algebrico, e la sua soluzione è una costante, che fisicamente *in questo caso* ha il significato della *posizione di equilibrio* $z_{eq} = mg/k$ del sistema. Potete provare direttamente che la $z_{eq}$ è una soluzione particolare, infilandola nell'Eq.7: la derivata di una costante fa zero, e si ottiene un'identità ($0 = 0$).

Allora la soluzione generale è $z(t) = B\cos(\omega t + \Phi) + mg/k$. Specifichiamo ora le condizioni al contorno, scegliendo, per esempio, $z(t=0) = 0$ e $v(t=0) = 0$, cioè supponendo di lasciar andare la massa dalla posizione di riposo della molla con velocità iniziale nulla. La $z(t)$ appena scritta deve soddisfare queste condizioni iniziali, e facendo un po' di algebra si trova $\Phi = 0$ e $B = -mg/k$. Quindi, si ha alla fine: $z(t) = mg(1 - \cos(\omega t))/k$. Anche in questo caso provate a trovare la soluzione che soddisfa altre condizioni al contorno. Inoltre, con un po' di ragionamento, potrete rendervi conto che quanto appena descritto può essere utile anche per trattare i casi in cui la posizione di riposo della molla non coincide con l'origine del sistema di riferimento.

**Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.** Abbondoniamo per il momento i problemi di oscillazioni, e consideriamo invece delle situazioni fisiche in cui il moto avviene in presenza di una forza di attrito viscoso, $F_{A,V} = -\beta v$ (ci restringiamo ad un caso unidimensionale di moto lungo l'asse $X$ per semplicità, e $v$ è proprio la velocità lungo questa direzione). Impiegando, come al solito, la legge di Newton, ed usando le relazioni formali che legano l'accelerazione alla velocità ($a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, possiamo scrivere un'equazione differenziale *per la velocità* del tipo:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m} v(t) \ , \tag{8}$$

che, volendo, possiamo generalizzare per una funzione generica $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} = -\gamma f(t) \ , \tag{9}$$

con $\gamma$ reale e *positivo*.

L'espressione appena scritta rappresenta un'**equazione differenziale del primo ordine omogenea a variabili separabili**. Il termine "variabili separabili" indica, praticamente, che è possibile "portare nello stesso membro" tutte le espressioni che contengono la funzione $f(t)$. Infatti L'Eq.9 si può riscrivere in questo modo:

$$\frac{df(t)}{f(t)} = -\gamma dt \ . \tag{10}$$

Notate che, nell'operazione che abbiamo appena eseguito, abbiamo trattato il *differenziale dt* come una qualsiasi funzione, cosa che, per essere rigorosi, richiederebbe un po' di cautela. In ogni caso, si tratta di un'operazione che è specifica per equazioni differenziali del tipo che stiamo considerando.

La soluzione può essere eseguita usando dei semplici strumenti di analisi matematica, in particolare quelli relativi alla determinazione di *integrali definiti*. Infatti possiamo formalmente integrare entrambi i membri dell'Eq.10:

$$\int_{f(t_0)}^{f(t)} \frac{df(t)}{f(t)} = \int_{t_0}^{t} -\gamma dt \ . \tag{11}$$

Fate attenzione agli *estremi di integrazione*: per il primo membro abbiamo scelto i valori che la funzione $f(t)$ assume all'istante iniziale $t_0$ e all'istante $t$ *generico*, mentre al secondo membro gli estremi di integrazione sono l'istante iniziale $t_0$ e l'istante generico $t$. D'ora in avanti, per semplificare le scritture, porremo $t_0 = 0$.

L'integrale al secondo membro è banale: esso dà $-\gamma(t - t_0) = -\gamma t$. L'integrale al primo membro richiede di conoscere la *primitiva* della funzione $1/f$. La matematica ci dice che per l'integrale *indefinito* di questa funzione si ha:

$$\int \frac{1}{f} df = \log(f) \ . \tag{12}$$

A questo punto dobbiamo introdurre gli estremi di integrazione ed otteniamo per l'integrale al primo membro dell'Eq.11: $\log(f(t)) - \log(f(t = 0))$. Osservate, quindi, come nella soluzione venga a comparire la *condizione iniziale* $f(t = 0)$, che d'ora in avanti indicheremo come $f_0$; questo è in accordo con la considerazione riportata in precedenza che per determinare la soluzione specifica di un'equazione differenziale abbiamo bisogno di un numero di condizioni iniziali pari all'ordine dell'equazione stessa.

Impiegando una nota proprietà dell'operatore logaritmo (log indica proprio il *logaritmo naturale*), e riassumendo quanto abbiamo scritto finora, possiamo concludere che l'integrazione definita dell'Eq.11 ci conduce a:

$$\log(\frac{f(t)}{f_0} = -\gamma t \ . \tag{13}$$

Calcolando l'esponenziale (indicato con exp) dei due membri e rimaneggiando un po' le espressioni, otteniamo infine: $f(t) = f_0 \exp(-\gamma t)$. Questa è la soluzione dell'equazione differenziale *omogenea* Eq.10.

Dunque, la legge oraria della velocità per il moto in presenza di attrito viscoso descritto dall'Eq.8 risulta:

$$v(t) = v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}t) \ , \tag{14}$$

che stabilisce un andamento *esponenziale decrescente* per la velocità col passare del tempo. Questa informazione è già sufficiente per descrivere il moto viscoso. Se fossimo interessati a scrivere la legge oraria del moto $x(t)$, dovremmo ulteriormente integrare l'Eq.14, dato che $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Non si impara granché da questa operazione, che in sostanza ripete quanto già visto, e quindi la riportiamo senza troppi commenti:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0 = \int_0^t v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}t)dt = \frac{-v_0}{\beta/m}\int_0^t \exp(-\frac{\beta}{m}t)d(-\frac{\beta}{m}t) = \frac{-v_0}{\beta/m}\exp(-\frac{\beta}{m}t)|_0^t = \frac{-v_0}{\beta/m}(1-\exp(-\frac{\beta}{m}t)) \ , \tag{15}$$

dove abbiamo impiegato un'ulteriore condizione al contorno, la $x_0$. Quindi anche lo spostamento segue una legge esponenziale crescente, che tende al *valore limite* $\frac{-v_0}{\beta/m}$ (provate a disegnare il grafico di queste funzioni).

Tornando sull'equazione per la $v(t)$, sottolineiamo che la soluzione (Eq.14) è stata trovata nel caso di equazione omogenea. Se supponessimo di avere anche un termine costante all'equazione differenziale di partenza (Eq.8), allora dovremmo cercare una *soluzione particolare* ed aggiungerla a quella dell'equazione omogenea (cioè all'espressione di Eq.14). Ad esempio potremmo immaginare un moto viscoso che avviene in presenza della forza peso $mg$, così come richiesto per descrivere la caduta di un corpo in un fluido viscoso (la goccia di pioggia, il paracadutista, una biglia lasciata cadere in acqua, etc.). L'equazione differenziale *per la velocità* sarebbe in questo caso (scegliendo un sistema di riferimento diretto verticalmente verso il basso):

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m}v(t) + g \ . \tag{16}$$

La soluzione particolare di questa equazione si ottiene facilmente imponendo $\frac{dv(t)}{dt} = 0$; In queste condizioni, essendo nulla l'accelerazione, la velocità resta costante, e quindi questa soluzione rappresenta la *velocità limite* raggiunta nella caduta quando la forza di attrito viscoso annulla l'effetto della forza peso. Quindi $v_{particolare} = v_{lim} = mg/\beta$. Allora la soluzione generale, avendo imposto la condizione iniziale $v_0$ (non riportiamo tutti i passaggi matematici necessari, provate a rifarli), diventa:

$$v(t) = v_0 \exp(-\frac{\beta}{m}t) + v_{lim}(1 - \exp(-\frac{\beta}{m}t)) \ . \tag{17}$$

**Oscillazioni smorzate.** Riprendiamo il caso di Eq.6 e supponiamo che il moto sia affetto da una forza di attrito viscoso, del tipo $-\beta v = -\beta\frac{dx(t)}{dt}$. Allora l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{\beta}{m}\frac{dx(t)}{dt} \ . \tag{18}$$

Essa rappresenta un esempio di una classe di equazioni differenziali omogenee di secondo ordine che contengono *anche* un termine del primo ordine. Generalizzando a funzioni qualsiasi, come abbiamo fatto prima, e riarrangiando i termini portandoli al primo membro, possiamo scrivere:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \gamma \frac{df(t)}{dt} + A f(t) = 0 \ , \tag{19}$$

dove $A$ e $\gamma$ ($\gamma = \beta/m$ per il moto viscoso) sono supposti reali e *positivi*.

Per questa classe di equazioni non è possibile trovare una soluzione per via "fisica", come abbiamo fatto per le oscillazioni *non smorzate*. Intuitivamente ci attendiamo che la soluzione combini l'aspetto oscillatorio, con pulsazione $\omega = \sqrt{A}$ tipico del moto armonico, con l'aspetto "esponenziale decrescente" che si trova risolvendo l'equazione differenziale *a variabili separabili* che esprime la presenza dell'attrito viscoso. Infatti la matematica ci mostra che la soluzione generale dell'Eq.19 è:

$$f(t) = B \exp -\gamma t \cos(\sqrt{A} t + \Phi) \ , \tag{20}$$

dove $B$ e $\Phi$ si trovano sempre imponendo le condizioni iniziali.

Per esempio, nel caso del sistema massa e molla in presenza di attrito viscoso, supponendo che le condizioni iniziali stabiliscano che $x(t = 0) = x_0$ e $v(t = 0) = 0$, la legge oraria del moto è: $x(t) = x_0 \exp(-(\beta/m)t) \cos(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{k/m}$, che rappresenta un moto oscillatorio di ampiezza decrescente nel tempo in modo esponenziale (*moto oscillatorio smorzato*). Da ultimo notiamo che, se nell'Eq.19 ci fosse anche un termine costante, allora dovrebbe essere ripetuta la procedura stabilita prima per trovare la soluzione generale delle equazioni non omogenee. Infine, come anticipazione di un argomento da trattare in seguito, osserviamo che è possibile sotto determinate condizioni trovare la soluzione di equazioni del tipo di Eq.19 in cui compaiano termini non omogenei che hanno un andamento oscillante nel tempo (*oscillazioni forzate*).