Derivazione della legge del moto uniformemente accelerato

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

October 11, 2004

Un punto si muove di moto unidimensionale con accelerazione uniforme (e costante) a. All'istante iniziale t_0 tale punto si trova nella posizione s_0 ed ha velocità v_0. Si vuole determinare la legge oraria del moto, cioè l'equazione del moto che stabilisce l'andamento della funzione posizione, $s(t)$, utilizzando tre "approcci" che conducono, ovviamente, allo stesso risultato finale:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \ . \tag{1}$$

Come punto di partenza, consideriamo che per questo tipo di moto la velocità $v(t)$ è funzione lineare del tempo, cioè si ha:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \ , \tag{2}$$

come risulta direttamente dalla definizione di accelerazione.

1. **L'approccio "analitico".** In questo approccio faremo uso della definizione di velocità istantanea: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$. Questa equazione può essere invertita, ottenendo:

   $$ds(t) = v(t)dt \ . \tag{3}$$

   L'equazione (3) può essere integrata al primo e al secondo membro usando come estremi di integrazione, rispettivamente, le posizioni iniziale e finale e gli istanti iniziale e finale del processo [1]. Al primo membro abbiamo:

   $$\int_{s_0}^{s(t)} ds(t) = s(t) - s_0 \ , \tag{4}$$

   che deriva direttamente dalla definizione di integrale *definito*, e tiene giustamente conto della condizione iniziale s_0.

   Al secondo membro, tenendo conto dell'Eq.2, si ha:

   $$\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(\tau - t_0))d\tau \ , \tag{5}$$

   dove, si noti bene, per evitare ambiguità si è cambiato il nome della variabile di integrazione (da t a τ), operazione assolutamente lecita. Cominciamo con il notare che l'integrando è somma di due funzioni; grazie alla proprietà additiva dell'operatore integrale, questo equivale a fare la somma di due integrali. Il primo dei due è molto semplice, dato che il termine v_0 è costante e si può "portare fuori" dal segno di integrale. Si ha infatti:

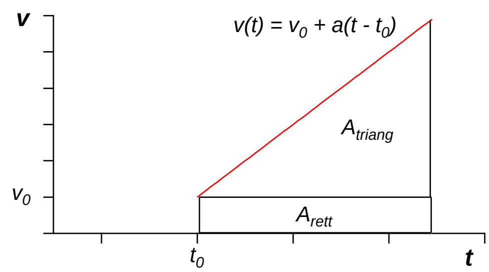
   $$\int_{t_0}^{t} v_0 d\tau = v_0 \int_{t_0}^{t} d\tau = v_0 \tau|_{t_0}^{t} = v_0(t - t_0) \ , \tag{6}$$

   avendo indicato con la barra verticale i limiti di integrazione della funzione.

   Il calcolo dell'altro integrale richiede la conoscenza dell'integrale *indefinito* $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$. In particolare, per $n = 1$ si ha $\int x dx = x^2/2$. In primo luogo, per ricondurci a questa forma, opereremo il "cambio di variabile":

   $$x = \tau - t_0 \ . \tag{7}$$

[1] Notate che, mentre l'istante iniziale è perfettamente definito, e vale t_0, l'istante finale è un istante generico t. Questo perché il nostro obiettivo è ricavare la *funzione del tempo* $s(t)$!



Questo cambio di variabile ci farà pure cambiare gli estremi di integrazione nell'integrale definito, che diventeranno 0 e $t - t_0$. Notiamo ora che, poiché il termine t_0 è costante, e quindi il suo differenziale è nullo, si ha, differenziando ambo i membri dell'Eq.7:

$$dx = d\tau \ . \tag{8}$$

Il secondo integrale che esce dal secondo membro dell'Eq.5 si scrive allora:

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau - t_0) d\tau = \int_0^{t-t_0} axdx = a \int_0^{t-t_0} xdx = \frac{a}{2} x^2 |_0^{t-t_0} = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \ . \tag{9}$$

Ora, sommando fra loro i risultati degli integrali di Eq.6 e 9 otteniamo la funzione $s(t)$ anticipata in Eq.1.

2. **L'approccio "grafico".** Questo approccio si basa sul significato geometrico-grafico dell'operatore di integrazione, che equivale a considerare l'*area sottesa alla curva* dell'integrando. In sostanza, quindi, lo spazio percorso $s(t)$ è rappresentato dall'area sottesa alla curva del grafico $v(t)$, considerando l'intervallo temporale tra t_0 e l'istante generico t. Come si vede in figura, tale area è quella di un trapezio, ed è pari alla somma dell'area A_{rett} del rettangolo di base $t - t_0$ ed altezza v_0, che vale $A_{rett} = (t - t_0)v_0$, e dell'area A_{triang} del triangolo di base $t - t_0$ ed altezza $v(t) - v_0$. Secondo quanto espresso nell'Eq.2, $v(t) - v_0 = a(t - t_0)$, per cui l'area del triangolo in questione è $A_{triang} = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$. Allora, dato che, per l'assunto iniziale, $s(t) = A_{rett} + A_{triang}$, si ottiene di nuovo la legge $s(t)$ dell'Eq.1.

3. **L'approccio "delle medie".** Dalla definizione di velocità media $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, sappiamo che lo spostamento $\Delta s = s - s_0$ può essere trovato facendo il prodotto tra $\overline{v}$ e $\Delta t = t - t_0$. Questa relazione, a rigore, è valida *solo se la velocità media resta costante*, cioè è indipendente dal tempo, come nel caso del moto rettilineo uniforme.

   Per un moto uniformemente accelerato, $\overline{v}$ *dipende dal tempo*. Possiamo comunque valutare la *funzione* $\overline{v}(t)$ facendo la media aritmetica del valore iniziale v_0 e del valore $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ assunto all'istante generico t. La media aritmetica dà:

$$\overline{v}(t) = \frac{v(t) + v_0}{2} = \frac{1}{2}(v_0 + a(t - t_0) + v_0) = v_0 + \frac{a}{2}(t - t_0) \ . \tag{10}$$

   Moltiplicando tale velocità media per l'intervallo temporale e riarrangiando i vari termini si ottiene ancora il risultato dell'Eq.1.

   Si noti che la possibilità di ottenere una corretta legge oraria del moto ragionando in termini di velocità media, anche se questa dipende dal tempo, è specifica per il problema considerato, in cui la velocità istantanea varia *linearmente* con il tempo. Se la legge di dipendenza fosse stata diversa, allora il risultato non sarebbe stato corretto!