Scuola di Dottorato Leonardo da Vinci – a.a. 2007/08

# LASER: CARATTERISTICHE, PRINCIPI FISICI, APPLICAZIONI

Versione 1 – Luglio 08 – http://www.df.unipi.it/~fuso/dida

## Parte 2
## Limiti della trattazione classica: polarizzazione dielettrica e corpo nero

# SOMMARIO

- Interazione radiazione materia in termini classici:
  - modello di Thomson e modello di Lorenz
  - assorbimento e dispersione da parte di un dielettrico

- Sorgenti convenzionali (termiche):
  - il problema del corpo nero
  - caratteristiche della radiazione convenzionale

Obiettivo : mostrare che l'approccio classico non basta per interpretare laser

Scopo aggiuntivo: esaminare interazione radiazione materia in termini più generali

# INTERAZIONE RADIAZIONE MATERIA

1. Laser richiede un mezzo materiale (mezzo attivo) per funzionare
2. Molte applicazioni dei laser prevedono interazione con mezzi materiali

$\Downarrow$

Necessario occuparsi di interazione radiazione materia

Macroscopicamente: conduttori (metalli) vs dielettrici (e semiconduttori)

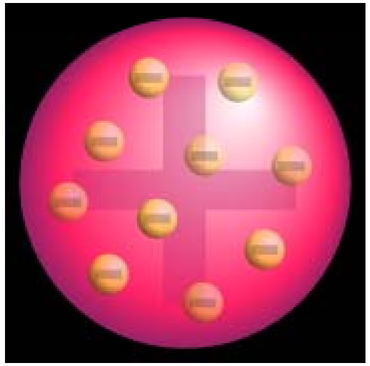
Grossolanamente:
interazione onda e.m. (ottica, cioè con $\omega < \omega_P = (ne^2/(m\varepsilon_0))^{1/2}$) con metalli:
-Debole assorbimento (effetto pelle su spessori < $\mu$m)
-Dissipazione Joule dovuto a correnti "quasi" superficiali
- Correnti superficiali oscillanti $\rightarrow$ onda riflessa ($R \sim 1$)
[cfr. condizioni al contorno e conservazione componente // di ***E***]
Nota: situazione più complessa in nanostrutture, e.g. plasmoni superficiali etc.

$\Downarrow$

In conduttore non si hanno fenomeni di amplificazione (in campo lontano)

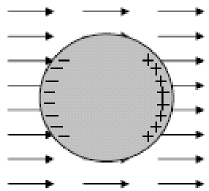
# DIELETTRICI (E SEMICONDUTTORI)

"Modello di Thomson":
- carica del nucleo è delocalizzata
- elettroni puntiformi "annegati" dentro la carica positiva



Suppongo atomo di idrogeno con protone delocalizzato in volume sferico "fisso" di raggio $a_0$:
$\rho = 3e/(4\pi a_0^3) \rightarrow E_{int}(r) = Q_{int}/(4\pi r^2) = er/(4\pi a_0^3)$

All'equilibrio l'elettrone è in $r = 0$; altrimenti sente forza $F(r) = -eE_{int}(r) = -kr$
Ad esempio, con campo statico $\boldsymbol{E_0}$ si ha $\boldsymbol{r_0} = e\boldsymbol{E_0}/k$
$\rightarrow$ si forma dipolo di momento $\boldsymbol{p_0} = e\boldsymbol{r_0}$
$\rightarrow$ si forma campo polarizzazione $\boldsymbol{P_0} = N\boldsymbol{p_0} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E_0}$
$\rightarrow$ polarizzabilità (statica) $\chi = Ne/(k\varepsilon_0)$



$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

Nell'atomo posso supporre forza elastica di legame elettrone protone
L'atomo, e quindi il materiale, si polarizzzano sotto l'effetto di campi esterni

# MODELLO DI LORENZ

Sistema legato nucleo elettrone ha frequenza propria di oscillazione $\omega_0=(k/m)^{1/2}$
Ragionevole aggiungere forza viscosa -*b**v*** che contrasta moto elettrone

Sottoposto a campo elettrico oscillante ω ho:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F\exp(i\omega t)$$

Nota: approssimazione di dipolo, tutto il sistema è interessato da campo in fase (sistema di piccole dimensioni)

smorzamento collisionale e quello proporzionale alla sola $x$ il termine armonico. Dividendo per la massa dell'elettrone $m$, ponendo $b/m=h$ e $k/m=w_0^2$ ($w_0$ = frequenza propria di risonanza del sistema), si ottiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=\frac{F}{m}\exp(i\omega t)$$

La soluzione dell'equazione differenziale deve essere di tipo periodico. Potremo quindi pensare che sia del tipo:

$$x(t)=x_0\exp(i\omega t)$$

Sostituiamo le derivate prima e seconda della nostra soluzione nell'equazione differenziale:

$$-\omega^2x_0\exp(i\omega t)+i\eta\omega x_0\exp(i\omega t)+\omega_0{}^2x_0\exp(i\omega t)=\frac{F}{m}\exp(i\omega t)$$

# LORENZ II

$$-\omega_2 + i\eta\omega + \omega_0{}^2 = \frac{F}{mx_0}$$

da cui:

$$x_0 = \frac{F}{m}\left(\frac{1}{\omega_0{}^2 - \omega^2 + i\eta\omega}\right)$$

Razionalizzando:

$$x_0 = \frac{F}{m}\left[\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\eta\omega}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2}\right] = \frac{F}{m}\left[\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2} - i\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2}\right]$$

che rappresenta un'ampiezza d'oscillazione complessa. Se ricordiamo che la forza elettrica $F$ è data dal prodotto della carica $e$ dell'elettrone per il campo elettrico $E$ della radiazione, avremo:

$$x_0 = \frac{eE}{m}\left[\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2} - i\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2}\right]$$

**Ampiezza (complessa) di oscillazione**

Il vettore polarizzazione $P$ è legato allo spostamento $x_0$ dalla relazione:

$$P = nex_0$$

**Campo di polarizzazione**

essendo $n$ il numero di cariche (elettroni) per unità di volume ed $e$ la carica dell'elettrone.
Ed essendo inoltre:

$$\overline{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\overline{E}$$

si avrà:

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{nex_0}{\varepsilon_0 E}$$

ovvero:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\left[\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2} - i\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2}\right]$$

**Costante dielettrica relativa (complessa!!!**

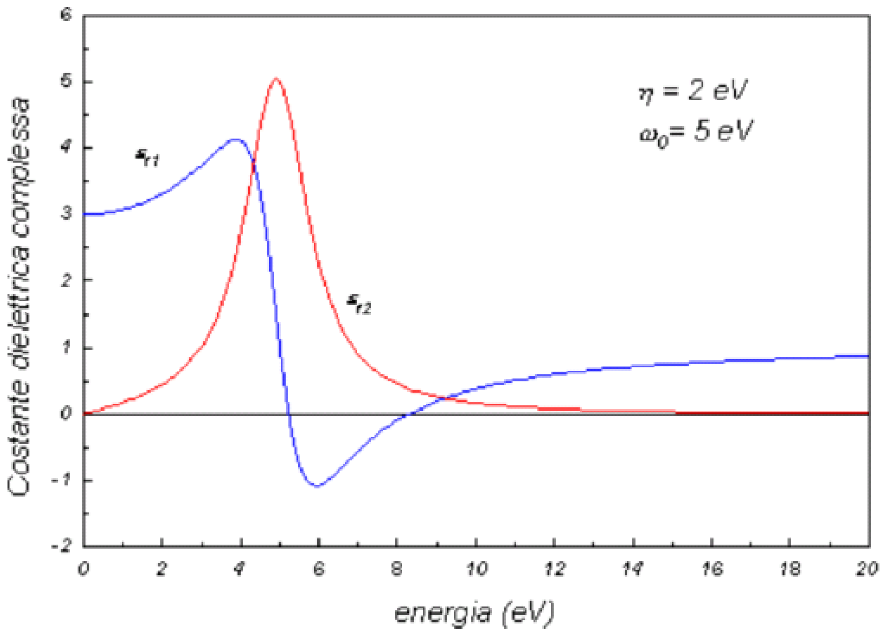
# COSTANTE DIELETTRICA COMPLESSA

Costante dielettrica complessa:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r1}(\omega) - i\varepsilon_{r2}(\omega)$$

$$\varepsilon_{r1}(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2}\right]$$

$$\varepsilon_{r2}(\omega) = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\left[\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \eta^2\omega^2}\right]$$




Andamento "dispersivo" per $\varepsilon_{r1}$
Andamento lorentziano per $\varepsilon_{r2}$

[Risonanza a $\omega \sim \omega_0$]

La funzione dielettrica, qui desunta per una singola frequenza di risonanza del sistema assorbente, può venire generalizzata al caso di un numero qualunque di tali frequenze, diventando:

$$\varepsilon_r = 1 + \sum_i \frac{n_i e^2}{\varepsilon_0 m}\left[\frac{\omega_{0i}^2 - \omega^2}{\left(\omega_{0i}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta_i^2\omega^2} - j\frac{\eta_i\omega}{\left(\omega_{0i}^2 - \omega^2\right)^2 + \eta_i^2\omega^2}\right]$$

# INDICE DI RIFRAZIONE COMPLESSO

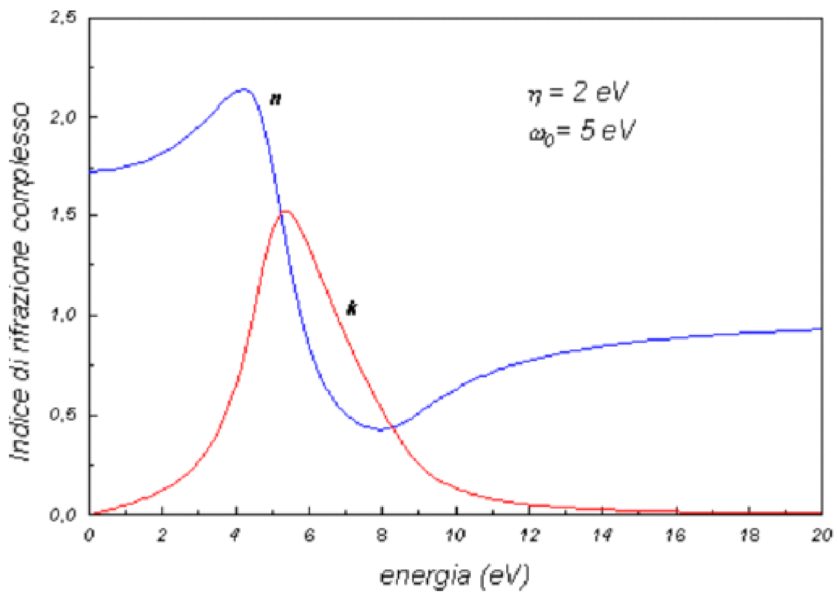
Onda piana monocromatica etc.: $\vec{E}(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t+\phi)}\hat{y}$

In condizioni statiche (o lontano da risonanze) si pone:

$v_{fase}=c/n$ e $k=\omega/v_{fase}=k_{vuoto}n=(2\pi/\lambda)n$

Qui si introduce indice di rifrazione complesso $n' = n + i\alpha$

con: $\varepsilon_{r1}=n^2-\alpha^2$ $\varepsilon_{r2}=2n\alpha$




$n'$ produce sfasamento (dispersione)

$\alpha$ produce assorbimento:

$E(x) \sim E_0 e^{-\alpha x}$

Classicamente un dielettrico può solo (disperdere) e assorbire

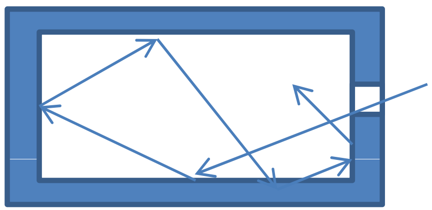
(con forma di riga lorentziana, larga ~$\eta$)

# RADIAZIONE IN EQUILIBRRIO CON SISTEMI MATERIALI

Sistemi materiali possono dunque assorbire radiazione
La radiazione assorbita può anche essere riemessa:
cfr.: dipolo oscillante nei dielettrici, correnti superficiali oscillanti nei conduttori (riflessione)

Corpo nero: sistema materiale che assorbe tutta la radiazione
→ Equilibrio radiazione/materia ad una certa temperatura

In fisica un **corpo nero** è un oggetto che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente (e quindi non ne riflette). Il corpo nero, per la conservazione dell'energia, irradia tutta la quantità di energia assorbita (coefficiente di emissività uguale a quello di assorbività) e deve il suo nome solo all'assenza di riflessione. Lo spettro (intensità della radiazione emessa ad ogni lunghezza d'onda) di un corpo nero è caratteristico, e dipende unicamente dalla sua temperatura.



**Modello**
**Scatola con pareti perfettamente riflettenti:**
**Radiazione che entra non riesce più a uscire**
**Ovvero**
**Può uscire radiazione (da piccolo foro) senza perturbare sistema**

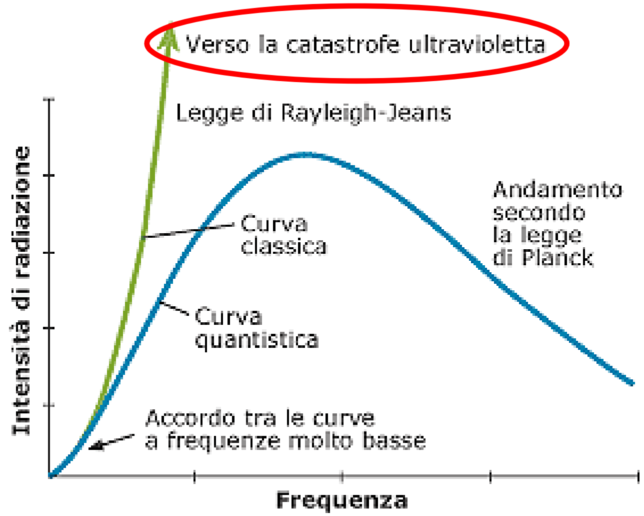
**Spettro assorbito = spettro emesso (per corpo nero ideale)**

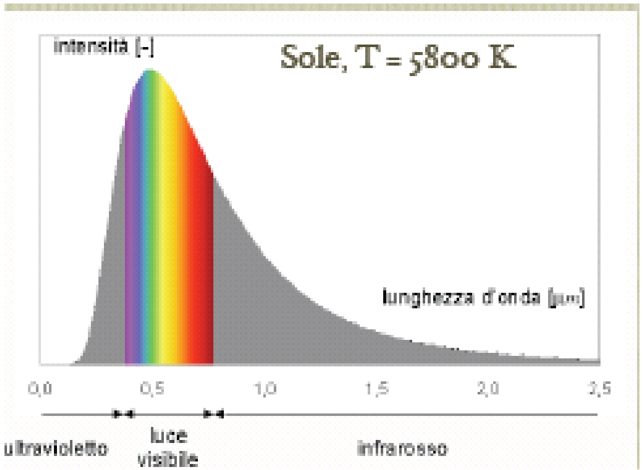
Domanda: come dipende dalla *T* (del sistema) lo spettro di energia e.m.?

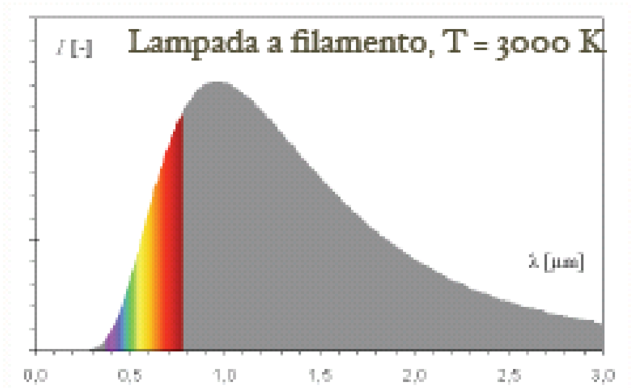
# IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

Storicamente (da fine '800): problema fondamentale con importanti implicazioni sul passaggio meccanica classica → MQ (Kirchoff, Planck, Einstein)

Prosaicamente: una lampadina alogena, cioè una sorgente <u>convenzionale</u> di luce, somiglia ad un corpo nero (nel suo filamento…)



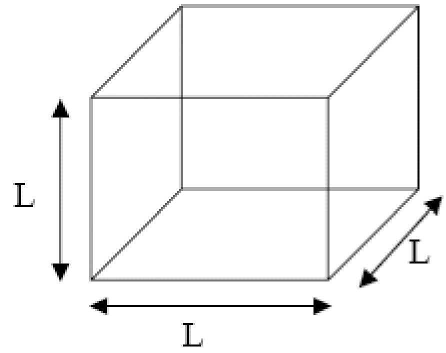




Corpo nero: ottimo esempio di sorgente di luce "non laser" (non coerente)

# RADIAZIONE IN UNA SCATOLA

Nel nostro modello la radiazione è confinata in una scatola con pareti perfettamente riflettenti (e.g., conduttrici)

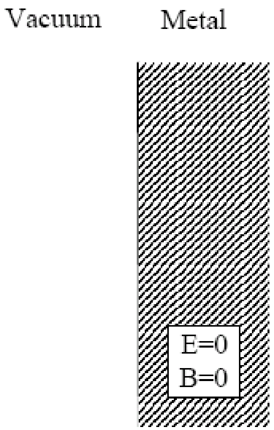



Schema del procedimento:

1. Modi di radiazione permessi;
2. Energia per ogni modo ed energia totale;
3. Numero di modi (densità degli stati);
4. Gas di fotoni e statistica quantistica

Boundary conditions at a metal:

Inside a perfect metal, E=0 and B=0 by definition.




In homework, you proved:

$$\vec{E}_{\parallel 2} = \vec{E}_{\parallel 1} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\parallel} = 0}$$

$$\vec{D}_{\perp 1} - \vec{D}_{\perp 2} = \rho_s$$

$$\vec{H}_{\parallel 2} - \vec{H}_{\parallel 1} = \vec{J}_s$$

$$\vec{B}_{\perp 1} = \vec{B}_{\perp 2} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{\perp} = 0}$$

## Onde stazionarie

$$\vec{E}_{incid}(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\,\hat{y}$$

$$\vec{E}_{rifl}(x,t) = -E_0 e^{i(-kx-\omega t)}\,\hat{y}$$

$$\vec{E}_{totale}(x,t) = \vec{E}_{incid}(x,t) + \vec{E}_{rifl}(x,t) =$$

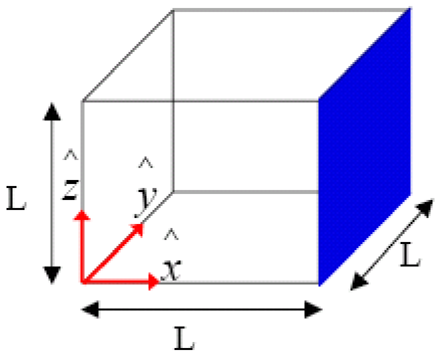
$$= E_0\left(e^{i(kx-\omega t)} - e^{i(-kx-\omega t)}\right)\hat{y} =$$

$$= 2E_0 i e^{-i\omega t}\sin(kx)\,\hat{y}$$

Nota: “fisicamente” “contano” le parti reali…

# QUANTIZZAZIONE MODI

Boundary conditions:




$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[E_0\,\hat{z}\,e^{i(k\hat{x}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[E_0\,\hat{z}\,e^{i(k\hat{x}\cdot\vec{r}+\omega t)}\right]$$

The plane x=L:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[E_0\,\hat{z}\,e^{i(k\hat{x}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[E_0\,\hat{z}\,e^{i(k\hat{x}\cdot\vec{r}+\omega t)}\right]$$

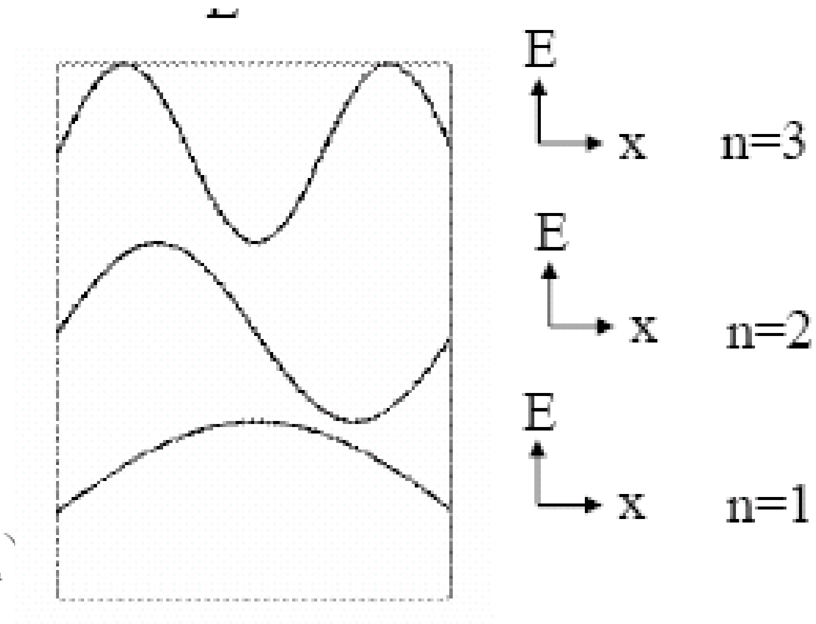
$$= -E_{0imag}\,\hat{z}\sin\left(k\,\hat{x}\cdot\vec{r}-\omega t\right) - E_{0imag}\,\hat{z}\sin\left(k\,\hat{x}\cdot\vec{r}+\omega t\right)$$

$$= -E_{0imag}\,\hat{z}\left[\sin(kL-\omega t)+\sin(kL+\omega t)\right]$$

$$= -2E_{0imag}\,\hat{z}\sin(kL)\cos(\omega t) = 0\,?$$

If and only if:

$$\boxed{k_n = n\pi/L} \qquad \boxed{\omega_n = ck_n = nc\pi/L}$$




Condizioni al contorno ($\boldsymbol{E_{//}}$ = 0 sulle pareti) della scatola) → modi quantizzati
Numeri d'onda permessi sono multipli di $\pi/L$
Nella scatola ci può "stare" un numero intero di $\lambda/2$

**Nota: altrove chiameremo la scatola cavità:**
**altrove ci riferiremo a simili fenomeni come dovuti a una buca di potenzilae**

# ENERGIA NELLA SCATOLA

## Energia e.m. da definizione *u*

Instantaneous energy per unit volume:

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\left[\vec{E}(\vec{r},t)\right]^2 + \mu_0\left[\vec{H}(\vec{r},t)\right]^2\right)$$

Total energy in box:

$$U_{total} = \iiint_{box} u(\vec{r},t)\,dV$$

It can be shown that for the box:

$$U_{total} = \frac{1}{2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)\left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right)$$

So, the amount of energy in the box can have any value.
We will show that this leads to a problem and must be wrong.
The energy in the box must be quantized: these are *photons*.

Approcci classici portano a risultati assurdi
Per calcolare lo spettro del corpo nero
occorre determinare il numero di modi

## Energia modi da equipartizione (supponendo temperatura *T*)

According to the equipartition theorem from thermodynamics, every mode of the system has an average energy $\langle U \rangle = (1/2)k_B T$.

Note: This is already a problem. Energy infinite.

What is the energy per frequency, then we will integrate over frequencies?
There are many modes per unit frequency.
Each has energy $k_B T$.

$$\varepsilon(\nu)d\nu = \frac{1}{2}kT \cdot N(\nu)d\nu$$

- $\varepsilon(\nu)d\nu$ is the energy between $\nu$ and $\nu+d\nu$.
- (This is the *spectrum* of the blackbody radiation.)
- $N(\nu)d\nu$ is the number of modes between $\nu$ and $\nu+d\nu$.

# NUMERO DI MODI

Modes per frequency $N(\nu)d\nu$

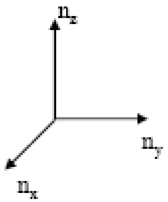
Recall:

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2$$

How many modes have $n_x^2+n_y^2+n_z^2<N^2$

I.E. $\nu < cN/2L$

Easy:




$$\#\text{ of modes} = 2\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi N^3\right)$$

$$\#\text{ of modes} = \int_0^{cN/2L} N(\nu)d\nu$$

$$\Rightarrow N(\nu)d\nu = \frac{1}{c^3}(8\pi)\nu^2 L^3$$

Problema!

$$N(\nu)d\nu = \frac{1}{c^3}(8\pi)\nu^2 L^3$$

$$\varepsilon(\nu)d\nu = kT\cdot N(\nu)d\nu$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\cdot kT\cdot\nu^2\cdot L^3$$

Rayleigh-Jeans law.
Experiments confirm at low frequencies only.

$$\boxed{\Rightarrow \int_0^\infty \varepsilon(\nu)d\nu = \infty}$$

Scritto in altra forma, il numero di modi per l'intervallo di frequenze $\nu$, $\nu+d\nu$ è:

$$g(\nu)d\nu = 2\frac{4\pi}{c^3}\nu^2 V$$

Ovvero, essendo $p = \hbar k = h/\lambda = h\nu/c$:

$$g(p)dp = 2\frac{4\pi}{h^3}p^2 V$$

Ovvero, essendo $E = h\nu$:

$$g(E)dE = 2\frac{4\pi}{c^3h^3}E^2 V$$

# ENERGIA DEL CORPO NERO

L'energia del sistema (gas di fotoni nella scatola, ovvero modi di radiazione) è data da:

Energia di un modo $h\nu$ x numero stati $g(\nu)d\nu$ x numero medio stati

$$U d\nu = h\nu\, g(\nu)\, d\nu\, \overline{n}(\nu)$$

I fotoni hanno momento angolare intero ($L_Z = \pm\hbar$)*

→ si comportano da bosoni

→ seguono statistica di Bose-Einstein

$$\overline{n}(\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

* corrisponde, classicamente, alla possibilità di avere onde circolari con polarizzazione levogira o destrogira

**Nota le differenze con statistica dei fermioni, e.g. , elettroni:**

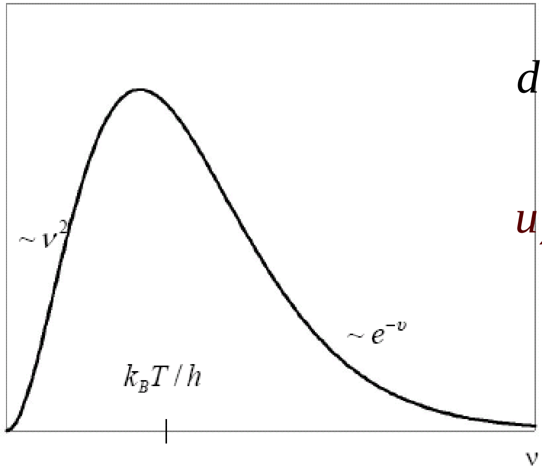
$$\overline{n}_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

$$u_\nu d\nu = \frac{U d\nu}{V} = h\nu \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

Spettro di Planck del corpo nero

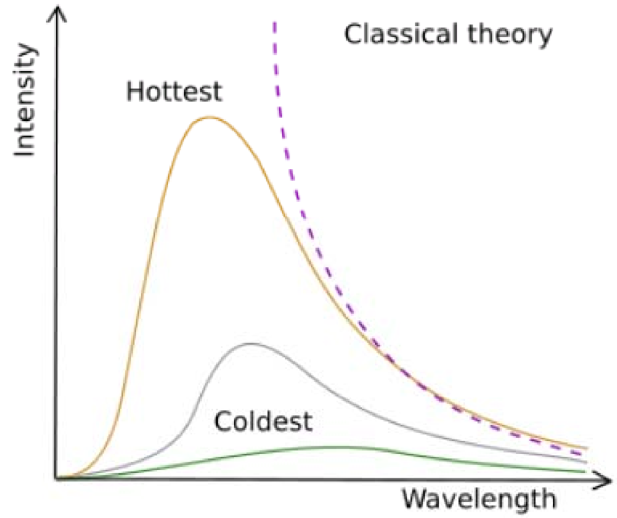
$$\boxed{u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}$$

# SPETTRO DEL CORPO NERO




$$d\nu = d\left|\frac{c}{\lambda}\right| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc^3}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda(kT)}} - 1} d\lambda$$



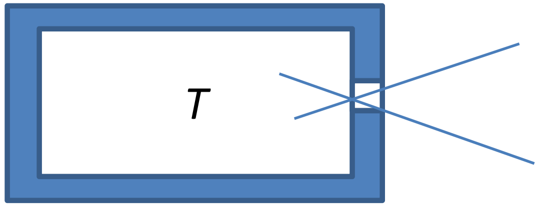

L'intensità della radiazione di un corpo nero alla temperatura $T$ è data dalla legge della radiazione di Planck:

$$I(\nu)d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu$$

dove $I(\nu)d\nu$ è la quantità di energia per unità di superficie per unità di tempo per unità di angolo solido, emessa nell'intervallo di frequenze compreso tra $\nu$ e $\nu + \delta\nu$ $h$ è la costante di Planck, $c$ è la velocità della luce e $k$ è la costante di Boltzmann.

La lunghezza d'onda alla quale l'intensità della radiazione emessa dal corpo nero massima è data dalla legge di Wien ($\lambda_{max} T = costante = 2898 \mu m \cdot K$), e la potenza totale emessa per unità di superficie (appunto, l'intensità) è data dalla legge di Stefan-Boltzmann $I = \sigma T^4$ (con $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$). Entrambe queste leggi sono deducibili dalla legge della radiazione di Planck, la prima cercandone il massimo in termini della lunghezza d'onda, la seconda integrando su tutte le frequenze e sull'angolo solido.

# CORPO NERO vs LASER




È importante ricordare che un qualunque corpo che si trovi a temperatura $T \neq 0$ K è sorgente di radiazione elettromagnetica dovuta al moto di agitazione termica degli atomi che lo compongono. L'emissione di energia e.m. avviene a spese dell'energia termica. Dunque all'interno della cavità sarà sempre presente una radiazione termica, e nel caso in cui la temperatura rimanga costante (condizioni di equilibrio termodinamico) la distribuzione di radiazione viene detta *spettro di corpo nero*.

Caratteristiche della luce uscente da corpo nero (o sorgente termica convenzionale):

- ✓ Non monocromaticità: molti colori
- ✓ Non direzionalità: è come un gas (di fotoni) che esce da un forellino
- ✓ Intensità: dipende da $T$
- ✓ Coerenza temporale e spaziale: come in un gas all'equilibrio termico ogni molecola si comporta "a modo suo" (e.g., per la velocità), anche qui fotoni emessi non hanno relazione di coerenza tra loro

Il corpo nero produce luce convenzionale, ben diversa da laser!

Nota: vale anche per sistemi materiali in equilibrio termodinamico in cui si sfrutta emissione spontanea, e.g., lampade a scarica in vapori, LED, etc.

## CONCLUSIONI

L'approccio classico (Maxwell, modello Lorenz) prevede che la radiazione può essere solo assorbita da un dielettrico: niente amplificazione!

Le sorgenti di luce convenzionali, tipo corpo nero, possono essere soddisfacentemente descritte con approcci quantistici (statistica B.E.), ma la conclusione è che la loro luce ha caratteristiche ben diverse da laser

$\Downarrow$

Per spiegare il laser occorre altro!

# FONTI


G. Mondio , modello di Lorentz, http://www.mi-ros.it/duplomiros/miro/mondio/lorentz.htm

E. Arimondo, Struttura della Materia (ETS, 2005)

http://www.wikipedia.org

P.Burke, Lasers and Photonics, winter 2002 (uci.edu)