

# Onde elettromagnetiche, ottica, polarizzazione

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 5 - FF, 11 maggio 2017)

In questa nota vengono richiamati alcuni concetti e alcuni formalismi utili per trattare semplici situazioni in cui sono coinvolte onde elettromagnetiche, in particolare nell'ambito dell'ottica. Queste situazioni sono parte di quelle che si incontrano nelle esperienze pratiche di laboratorio, in particolare quelle che riguardano la polarizzazione, la sua misura e la sua manipolazione. L'argomento delle onde elettromagnetiche è estremamente vasto e ricco di spunti concettuali che in queste note saranno bellamente ignorati. L'enfasi viene posta, piuttosto, su alcune questioni di terminologia, nomenclatura e semplice matematica, utili per avere un background sufficientemente ampio per la comprensione delle esperienze pratiche, oltre che per avere un quadro sufficientemente generale dell'ottica di polarizzazione.

## I. EQUAZIONE E FUNZIONE D'ONDA

Una *funzione d'onda* rappresenta in generale l'andamento nello spazio e nel tempo di una qualche "perturbazione". Per esempio, una funzione d'onda può descrivere l'andamento di campo elettrico e magnetico nello spazio e nel tempo. Dal punto di vista matematico, la funzione d'onda è soluzione di una *equazione d'onda*, costruita sulla base di definizioni e equazioni specifiche per le grandezze fisiche e il sistema che si stanno considerando.

L'equazione d'onda per le onde elettromagnetiche in un materiale dielettrico, *in assenza di correnti e cariche libere*, si costruisce a partire dalle equazioni di Maxwell per il rotore dei campi. Si ha infatti

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

dove la seconda equazione deriva da  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t$  con l'assunzione, valida per materiali isotropi, omogenei e "lineari",  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$  e  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ . Per i fenomeni che intendiamo discutere qui, che riguardano materiali di tipo ordinario (non nanostrutturati, non "metamateriali"), possiamo sicuramente porre  $\mu = \mu_0$ , ovvero  $\mu_r = 1$ : infatti  $\mu_r$  è sensibilmente diverso da uno solo per i ferromagneti, che sono generalmente conduttori opachi, e che quindi non permettono il passaggio della radiazione elettromagnetica di interesse per l'ottica.

Facendo il rotore dei due membri delle due equazioni di Maxwell e usando un minimo di algebra si ottiene facilmente l'equazione d'onda per il campo elettrico

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (3)$$

un'equazione formalmente identica si ottiene anche per il campo di induzione magnetica. Considerato ciò, è lecito focalizzarsi sulla soluzione per il campo elettrico, essendo sempre possibile, come vedremo dopo, ricavare l'andamento del campo di induzione magnetica.

È molto interessante notare che il termine  $\mu_0 \epsilon$  che compare al secondo membro dell'Eq. 3 deve avere, per sem-

plici ragioni dimensionali, le dimensioni di una velocità alla meno due. Quindi è possibile individuare una velocità (detta *velocità di fase*, e sarà l'unica velocità di cui tratteremo qui, non essendo interessati a fenomeni "dispersivi")  $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon}$ . Tenendo conto che nel vuoto, dove  $\epsilon = \epsilon_0$ , fino a prova contraria tale velocità è la costante  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s, in un materiale dotato di permittività dielettrica relativa  $\epsilon_r > 1$  si ha  $v = c/\sqrt{\epsilon_r} = c/n$ , dove è stato introdotto l'*indice di rifrazione (reale)* del mezzo considerato,  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  (con  $\epsilon_r \geq 1$  reale). Questa definizione è in accordo con quello che tutti diamo per buona, cioè che una perturbazione (elettromagnetica, o di qualsiasi altro genere) viaggia a una velocità inferiore o al massimo uguale alla velocità della luce.

### A. Onda piana, monocromatica, progressiva

Una soluzione dell'Eq. 3 è data dalla funzione d'onda

$$\vec{E} = \{E_{0+} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] + E_{0-} \exp[i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\} \hat{e}. \quad (4)$$

Per motivi legati all'accresciuta semplicità matematica che così viene offerta, la funzione è scritta in forma complessa: come si verifica sempre quando si usano grandezze complesse, il campo elettrico dell'onda elettromagnetica è dato dalla parte reale dell'espressione.

Nella funzione di Eq. 4 compaiono due termini, sommati tra loro attraverso i pesi  $E_{0+}$  e  $E_{0-}$ , che devono avere le dimensioni di campi elettrici. Grazie alla linearità delle equazioni di cui facciamo uso, sicuramente non si perde in generalità se ci si limita a considerare solo uno dei due termini, per cui considereremo come funzione d'onda "modello" per il campo elettrico la

$$\vec{E} = E_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \hat{e}, \quad (5)$$

che, per i motivi che illustreremo tra breve, rappresenta un'onda piana, monocromatica, progressiva e armonica. Prima di proseguire, scriviamo anche la soluzione dell'equazione d'onda, ovvero la funzione d'onda, per il campo di induzione magnetica; come già osservato, essa deve formalmente essere simile a quella per il campo elettrico,

e quindi deve avere l'espressione

$$\vec{B} = B_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \hat{b}. \quad (6)$$

Osservate che nelle espressioni compaiono diversi versori ( $\hat{e}$  e  $\hat{b}$ ) a indicare le direzioni dei due campi, che, come stabilito dalle equazioni di Maxwell e riassunto dalle proprietà dell'operatore rotore, non possono essere le stesse. Infatti, affinché le equazioni di Maxwell siano soddisfatte, deve essere, come è facile verificare,

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{v}, \quad (7)$$

ovvero le direzioni di  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  formano una *terna ortogonale destrorsa*, per cui l'onda si dice *trasversale*. In altre parole, nelle onde di nostro interesse campo elettrico e magnetico sono ortogonali fra loro, ed entrambi giacciono su un piano che è ortogonale alla direzione di  $\vec{k}$ . Inoltre dall'Eq. 7 si deduce che le ampiezze dei campi sono legate tra loro dalla relazione

$$B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{E_0}{c} n. \quad (8)$$

Ricordando la definizione di *fronte d'onda* come luogo dei punti in cui, a un dato istante, la perturbazione (i campi!) hanno un dato valore, si vede subito che le funzioni che abbiamo scelto come soluzione dell'equazione d'onda sono:

- *piane*, essendo i fronti d'onda dei piani ortogonali alla direzione del *vettore d'onda*  $\vec{k}$ ;
- *progressive*, perché i fronti d'onda si muovono alla velocità di fase  $v$  nella direzione positiva di  $\vec{k}$ , come potete facilmente verificare calcolando dove "va a finire" un certo fronte d'onda dopo un certo intervallo di tempo;
- *monocromatiche*, dato che l'andamento temporale è stabilito da un'unica pulsazione  $\omega$ ;

inoltre si usa l'aggettivo armoniche per indicare che, in una posizione fissata, l'intensità della perturbazione (dei campi) è descritta nel dominio del tempo da funzioni tipo seno o coseno.

## B. Trasporto di energia e intensità dell'onda

La rilevanza che le onde elettromagnetiche hanno in moltissimi fenomeni risiede principalmente nel fatto che esse sono associate a trasporto di energia, ovvero di potenza. Nelle nostre esperienze pratiche, questo trasporto di energia viene analizzato usando un fotorivelatore, come ad esempio un fotodiodo. Un dispositivo di questo tipo permette di misurare il *valore medio nel tempo* della potenza dell'onda integrata su una certa superficie (la minore tra sezione del fascio luminoso che si utilizza e la

sezione dell'area sensibile del dispositivo). D'altra parte, come mostrato nella Fig. 1, che commenteremo fra breve, le onde elettromagnetiche rilevanti in ottica hanno frequenze, o pulsazioni, che non possono essere apprezzate da nessuno strumento puramente elettronico (per intenderci, un oscilloscopio), per cui è evidente che quello che viene valutato e misurato è il valore medio nel tempo.

L'energia trasportata da un'onda elettromagnetica per unità di tempo e di superficie è data dal vettore di Poynting,  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ . Per l'ortogonalità tra le direzioni che abbiamo stabilito sopra,  $\vec{S}$  ha la direzione di  $\vec{k}$  per un'onda progressiva. Dunque la direzione di  $\vec{k}$ , detta *direzione di propagazione*, è quella lungo cui si svolge il trasferimento di energia. Il calcolo del valore medio nel tempo può essere fatto con diverse tecniche. La più elegante è la seguente:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}. \quad (9)$$

Eseguito il calcolo per il *modulo* di questa quantità, tenendo conto della relazione tra le ampiezze dei campi data in precedenza, si trova facilmente

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2. \quad (10)$$

L'espressione  $\epsilon E_0^2/2$  rappresenta la densità di energia media associata al campo elettromagnetico, per cui la grandezza sopra espressa rappresenta il flusso di potenza su una superficie unitaria ortogonale alla direzione di  $\vec{k}$ , e ha le dimensioni di una potenza diviso per una superficie (una buona unità di misura potrebbe essere W/m<sup>2</sup>, o W/cm<sup>2</sup>, come spesso in uso in ottica laser). A essa si dà il nome (gergale) di *intensità* dell'onda.

## C. Semplificazione, nomenclatura pratica e ordini di grandezza

Per semplificare la notazione, consideriamo d'ora in avanti  $\vec{k} // \hat{z}$ , cioè assumiamo che l'onda piana si propaghi lungo la direzione dell'asse  $Z$  di un sistema di riferimento cartesiano. Di conseguenza, campo elettrico e magnetico oscillano in fase, ortogonali fra loro, sul piano  $XY$  e la funzione d'onda di Eq. 5 assume la forma

$$\vec{E} = E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \hat{e}, \quad (11)$$

con  $\hat{e}$  appartenente al piano  $XY$ .

Si parla comunemente di onde elettromagnetiche a proposito di fenomeni che coinvolgono range estremamente ampi dei parametri  $k$  e  $\omega$  che compaiono nella funzione d'onda. È possibile fare un minimo di classificazione basandosi soprattutto sulle applicazioni delle onde coinvolte. Un esempio è fornito dalla Fig. 1 (tratta da wikipedia), dove la classificazione è fatta sulla base del valore della *lunghezza d'onda*  $\lambda$ , su cui torneremo fra breve.

Nell'ottica (tradizionale) si lavora in genere con radiazione elettromagnetica visibile (o nel range compreso tra

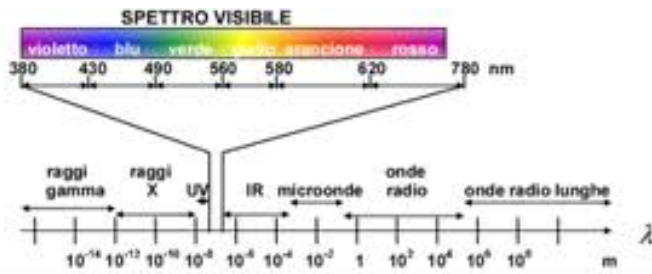


Figura 1. Esempio di classificazione delle onde elettromagnetiche sulla base della lunghezza d'onda  $\lambda$  e rappresentazione a colori dello spettro visibile.

vicino ultravioletto - UV - e vicino infrarosso - IR) a cui convenzionalmente corrisponde una lunghezza d'onda di alcune centinaia di nanometri (per esempio,  $\lambda = 380\text{--}780$  nm, circa, per il visibile). In questo modo ci si restringe di fatto a una piccola fetta del cosiddetto spettro della radiazione elettromagnetica.

Può essere utile disegnare il grafico della parte reale della funzione d'onda di Eq. 11 in funzione della coordinata  $z$  (supponendo fissato il tempo, per esempio a  $t = 0$ ) o in funzione del tempo  $t$  (supponendo fissata la posizione, per esempio in  $z = 0$ ), come rappresentato in Fig. 2. Questa operazione permette di apprezzare gli ordini di grandezza delle scale spaziali e temporali su cui varia il campo. Si vede facilmente come la lunghezza d'onda  $\lambda$  sia legata al numero d'onda  $k = |\vec{k}|$ , alla frequenza  $\nu = 2\pi/\omega$  e alla velocità di fase  $v$  (che qui supponiamo pari a  $c$ , cioè l'onda *si propaga nel vuoto*, in questo caso), dalle relazioni

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12)$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (13)$$

Gli ordini di grandezza (e le unità di misura) per numero d'onda e frequenza rilevanti in ottica sono quindi:  $k \sim 10^4 \text{ cm}^{-1}$  (notate l'unità di misura, che è tipica nell'ottica),  $\nu \sim (4 - 9) \times 10^{14} \text{ Hz}$  (notate l'esponentone), che, non per un caso, è dello stesso ordine di grandezza della frequenza di rotazione dell'elettrone attorno al nucleo in un modello atomico classico (planetario).

#### D. Energia della radiazione

Un altro parametro caratteristico della radiazione, che ha grosse implicazioni in tantissimi ambiti, riguarda l'energia della radiazione stessa. L'argomento che permette di valutare questo parametro in modo diretto ha a che fare con aspetti non classici della fisica, che avrete ampio modo di approfondire andando avanti con i vostri studi. Tuttavia, già in questa sede può far comodo notare che, in parallelo alla descrizione *ondulatoria* della radiazione elettromagnetica, è possibile utilizzare una descrizione *corpuscolare*, in conseguenza della quale, per

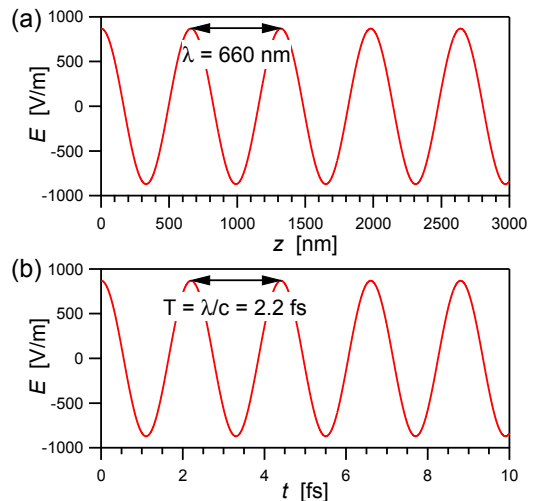


Figura 2. Grafico della parte reale della funzione d'onda per il campo elettrico (onda progressiva diretta lungo  $\hat{z}$ ) in funzione della coordinata  $z$  (a) e del tempo  $t$  (b). Nel grafico (a) si è supposto  $t = 0$  e imposto che il campo fosse massimo in  $z = 0$ ; nel grafico (b) si è supposto  $z = 0$  e imposto che il campo fosse massimo in  $t = 0$ . Lunghezza d'onda  $\lambda$  e periodo  $T = 2\pi/\omega$  sono indicati nei grafici. Per fissare le scale orizzontali dei grafici si è scelta  $\lambda = 660$  nm (un bel colore rosso intenso). Per fissare la scala verticale si è supposto che la radiazione avesse la potenza  $P = 1$  mW, che la propagazione avvenisse nel vuoto e che si fosse in presenza di un fascio di radiazione con distribuzione spaziale di intensità omogenea su un'area di  $1 \text{ mm}^2$  (tutto questo consente di determinare l'ampiezza del campo elettrico dell'onda): notate bene i valori numerici e le unità di misura delle scale.

intenderci, un fascio di luce può essere visto come un flusso di particelle con proprietà molto specifiche (senza massa, senza carica, ma dotate di quantità di moto, momento angolare e, appunto, energia), che si chiamano *fotoni*. L'energia trasportata da un singolo fotone dipende solo dalla frequenza della radiazione attraverso la semplice relazione

$$E_{\text{phot}} = h\nu, \quad (14)$$

con  $h$  costante fondamentale della meccanica quantistica, chiamata *costante di Planck* ( $h \approx 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ). Nel vuoto, la relazione appena scritta dà luogo a un legame di proporzionalità inversa con la lunghezza d'onda:  $E_{\text{phot}} = hc/\lambda$ . Il prodotto tra le costanti fondamentali  $h$  e  $c$  può essere determinato numericamente. Alla fine, si ottiene una formulina che siete invitati a tenere sempre bene in mente:

$$E_{\text{phot}} [\text{eV}] \approx \frac{1240}{\lambda [\text{nm}]} \quad (15)$$

Dunque il fotone della radiazione visibile ha un'energia dell'ordine di  $1.5 - 3 \text{ eV}$  (la scala di energie in eV è quella più semplice da usare quando si vogliono descrivere le

proprietà della materia, incluse quelle che riguardano la sua interazione con la luce).

Se ricordate che  $1 \text{ eV} \cong 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , potete facilmente rendervi conto che un singolo fotone porta un'energia piccolissima. Però di fotoni potete (spesso) averne tantissimi: per esempio, un piccolo puntatore laser di potenza  $1 \text{ mW}$  che emette nel rosso ( $\lambda \approx 650 \text{ nm}$ ) è in grado di produrre qualcosa dell'ordine di  $10^{16}$  fotoni al secondo.

### E. Limitazioni e caveat

Ci sono un paio di osservazioni che è opportuno citare a questo punto. La prima riguarda il modo con cui abbiamo ottenuto l'equazione d'onda e le varie semplificazioni, o approssimazioni, che abbiamo, anche implicitamente, usato. In primo luogo, la maggior parte dei materiali di interesse per l'ottica, e più in generale per la fisica, sono *dispersivi*, cioè in questi materiali l'indice di rifrazione  $n$  dipende dalla lunghezza d'onda, o frequenza, della radiazione. Di per sé questa precisazione non modifica la matematica che abbiamo sviluppato, però ricordatevene. Fra le tante conseguenze, nel caso di materiali dispersivi, accanto alla velocità di fase  $v = \omega/k$ , si definisce un'altra velocità, detta *velocità di gruppo*,  $v_g = \partial\omega/\partial k$ , che serve proprio a tenere conto di come l'onda si propaga in un mezzo il cui indice di rifrazione cambia con la frequenza dell'onda stessa.

Inoltre, come già accennato, in questa nota ci limitiamo a considerare situazioni fisiche “ordinarie” per l'ottica, in cui, per esempio,  $\mu_r \approx 1$ ,  $\epsilon_r \geq 1$  reale, e  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  reale. La tecnologia attuale è certamente in grado di creare dei sistemi artificiali, micro- o nanostrutturati, il cui comportamento macroscopico può essere descritto (abbastanza) facilmente ipotizzando che le grandezze che abbiamo citato abbiano valori “non convenzionali”, o siano immaginarie. Avrete probabilmente sentito parlare di cristalli fotonici, metamateriali, superfici stealth, plasmoni, tutti ambiti in cui è spesso conveniente definire in maniera opportuna, e diversa da quella convenzionale, le grandezze di interesse. Bene, tutto questo qui non lo consideriamo.

Infine, è necessario chiarire che l'uso dell'onda piana, progressiva e monocromatica come funzione “modello” dell'ottica contiene alcune criticità, che possono essere individuate (ma non sanate) facilmente. L'onda piana porta con sé un'idea di “infinito” che non sempre suona realistica: infatti i fronti d'onda (piani) che essa prevede hanno virtualmente un'estensione infinita (non c'è alcuna dipendenza da  $x$  o  $y$  nella funzione di Eq. 11) e il carattere puramente monocromatico implica, come sapete o saprete, che l'onda è stata accesa in un istante infinitamente precedente e che verrà spenta in un istante infinitamente successivo a quello dell'osservazione. Tuttavia, specie adottando alcune ulteriori tecniche di rappresentazione (“modi trasversali”, “pacchetti d'onda”), si può convivere con queste difficoltà, soprattutto perché la grande semplicità che offre la trattazione di problemi con onde piane supera (spesso) le inesattezze che essa comporta.

## II. POLARIZZAZIONE

Generalmente, lo studio, ovvero la misura e la manipolazione, della *polarizzazione* riguarda l'analisi del versore  $\hat{e}$  che indica la *direzione del campo elettrico* (per le onde che qui consideriamo, quella del campo magnetico è sempre ortogonale a questa e alla direzione di propagazione). Supponendo un'onda piana che si propaga lungo  $Z$ , sappiamo che  $\hat{e}$  deve appartenere al piano  $XY$ , ma in questo modo non ne fissiamo la direzione.

La polarizzazione si dice *lineare* se  $\hat{e}$  mantiene costante nel tempo la sua direzione, cioè se il campo elettrico oscilla *sempre* lungo *la stessa* direzione cartesiana. Questo si ottiene, ad esempio, scrivendo  $\hat{e} = a\hat{x} + b\hat{y}$ , con  $a, b$  costanti reali opportunamente normalizzate. La direzione di  $\hat{e}$  si mantiene allora costante nel tempo, essendo individuata ad esempio dall'angolo  $\phi$  rispetto alla direzione  $X$ :  $\tan \phi = b/a$ .

La polarizzazione si dice *circolare* quando, invece, il vettore  $\vec{E}$  ruota con velocità angolare  $\omega$  sul piano  $XY$ . Questo si ottiene, ad esempio, quando  $\hat{e} = (\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$  (notate il fattore di normalizzazione), cioè quando le componenti  $E_x$  e  $E_y$  del campo sono *sfasate fra loro* di  $\pm\pi/2$ . In queste condizioni possiamo infatti scrivere

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(kz - \omega t)])\hat{x} + (\exp[i(kz - \omega t \pm \pi/2)])\hat{y} \}, \quad (16)$$

e notare che il termine aggiunto nell'argomento dell'esponenziale complesso per la componente  $Y$ ,  $\exp(\pm i\pi/2)$ , equivale a moltiplicare per  $\pm i$  la componente stessa. Se estraiamo la parte reale di questa funzione d'onda possiamo facilmente osservare che la “punta” del vettore  $\vec{E}$  compie una traiettoria circolare sul piano  $XY$ , con velocità angolare  $\omega$ .

Il segno dello sfasamento denota due tipi di polarizzazione circolare, la *circolare sinistra* e la *circolare destra*, che spesso si indicano con  $\hat{\sigma}_-$  e  $\hat{\sigma}_+$ , a cui corrispondono due sensi di rotazione. In genere, la convenzione si riferisce a un osservatore verso il cui occhio si dirige la radiazione; sinistra e destra hanno allora a che fare con rotazione rispettivamente antioraria o oraria. È interessante osservare che, come  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , anche  $\hat{\sigma}_-$  e  $\hat{\sigma}_+$  sono *basi ortonormali* per descrivere il vettore  $\vec{E}$  nel piano  $XY$ . In altre parole, qualsiasi direzione di polarizzazione lineare può essere rappresentata con opportune combinazioni lineari delle polarizzazioni circolari destra e sinistra.

La Fig. 3 illustra schematicamente la polarizzazione lineare e quella circolare sul piano  $XY$ .

Infine, la polarizzazione si dice *ellittica* quando lo sfasamento tra le componenti  $X$  e  $Y$  di  $\vec{E}$  è diverso in modulo da  $\pi/2$  (o suoi multipli dispari), ovvero, che è la stessa cosa, quando  $\hat{e} = a\hat{x} + b\hat{y}$ , con  $a, b$  costanti *complesse* opportunamente normalizzate: è abbastanza facile convincersi che, per polarizzazione ellittica, la “punta” di  $\vec{E}$  descrive un'ellisse nel piano  $XY$ , e che la polarizzazione circolare può essere considerata un caso particolare di polarizzazione ellittica.

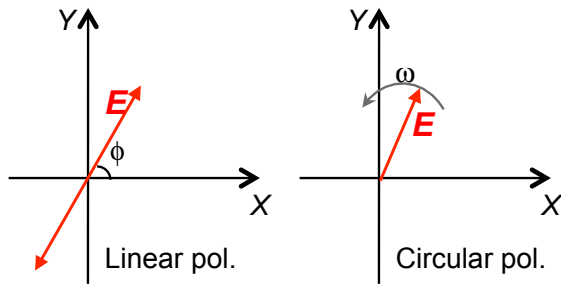


Figura 3. Illustrazione schematica sul piano  $XY$  della polarizzazione lineare (che forma un angolo  $\phi$  rispetto all'asse  $X$ ) e circolare (che ruota in senso antiorario, dunque di tipo  $\hat{\sigma}_-$ ).

### A. Significato e rilevanza della polarizzazione

Avere una polarizzazione lineare implica, di fatto, essere in grado di individuare una direzione di *anisotropia* nel piano  $XY$ . Invece la polarizzazione circolare ha spesso a che fare con una caratteristica geometrica un po' più complicata, che in genere si chiama *chiralità* e che, per esempio, è coinvolta in strutture che si distribuiscono spazialmente a forma di molla a spirale: in questo caso possono essere facilmente individuate delle proprietà geometriche che rimandano alla polarizzazione circolare sinistra o destra.

Le sorgenti di radiazione di interesse pratico per l'ottica (per esempio lampade e laser) hanno in genere caratteristiche di polarizzazione abbastanza ben definite. Anche se questa classificazione è molto grossolana e limitata in termini di casistica, in genere le lampade, in particolare quelle a filamento, producono una luce che è *non polarizzata*, o, per meglio dire, è polarizzata *random*: la direzione di polarizzazione cambia nel tempo in un modo che non può essere predeterminato facilmente, o, se preferite, la luce emessa contiene *tutte* le possibili direzioni di polarizzazione. Questo può essere visto come conseguenza del fatto che, specie quando a emettere è della materia che si trova in equilibrio termico ad alta temperatura (il filamento che, come vedrete in futuro, è spesso una buona approssimazione per un *corpo nero*), non è possibile individuare una direzione privilegiata nello spazio. Invece i laser producono quasi sempre (non sempre sempre) radiazione polarizzata *linearmente*, per motivi talvolta costruttivi e più spesso per ragioni collegate direttamente al loro funzionamento. Di norma, non esistono sorgenti di uso pratico che emettano direttamente luce polarizzata circolarmente, per ottenere la quale è necessario manipolare la radiazione della sorgente (per esempio polarizzata linearmente) con uno dei metodi che accenneremo tra breve.

La rilevanza della polarizzazione può essere compresa riflettendo su tanti aspetti, per esempio sui seguenti:

- il campo elettrico è un vettore, e dunque la sua direzione ha in genere un ruolo importante nel de-

terminare i fenomeni di interazione fra radiazione e materia;

- lo studio della polarizzazione emessa, oppure della risposta alla luce polarizzata, è un potentissimo sistema analitico nell'ambito della cosiddetta spettroscopia;
- a questo proposito, è storia interessante quella che riguarda la risposta alla luce polarizzata circolarmente di molte delle sostanze molecolari che costituiscono le basi della materia vivente: pare che esse siano prevalentemente “levogire”, cioè che “sentano” in modo più efficace la radiazione polarizzata circolarmente in un dato verso, e a tutt'oggi le motivazioni di questa “asimmetria” sono ancora misteriose;
- esiste un'infinità di applicazioni per sistemi in grado di analizzare o manipolare la polarizzazione; accanto a dispositivi ottici molto raffinati, che magari incontrerete nella vostra futura carriera scientifica, sistemi del genere li avete probabilmente davanti agli occhi proprio ora, se state guardando queste note sullo schermo (piatto) di un qualsiasi dispositivo elettronico.

## III. MANIPOLAZIONE E ANALISI DELLA POLARIZZAZIONE

Focalizziamo ora la nostra attenzione su due dispositivi per l'analisi (e misura), o manipolazione, della polarizzazione in uso nelle esperienze pratiche di laboratorio, precisamente il *polarizzatore lineare (polaroid)* e le *lamine ritardanti*.

Questi dispositivi sono costruiti con materiali la cui risposta ottica dipende dalla polarizzazione della radiazione che ci incide sopra. In termini generali, materiali dotati di simili caratteristiche si dicono *otticamente attivi* ed è possibile distinguere fra due categorie principali di attività ottica: *dicroismo* e *birifrangenza*.

Il *dicroismo* ha a che fare con l'assorbimento, e dunque la trasmissione, della radiazione attraverso il materiale. Nel caso più semplice (dicroismo lineare), che è quello che ci interessa, un materiale dicroico assorbe o fa passare l'onda che ci incide in maniera dipendente dalla direzione di polarizzazione dell'onda stessa, o, per meglio chiarire, dell'angolo compreso tra questa polarizzazione e un asse caratteristico (un *asse ottico*) del materiale dicroico.

La *birifrangenza*, invece, non tiene conto di fenomeni di assorbimento, ma agisce invece sulla *fase* dell'onda grazie al fatto che nei materiali birifrangenti la velocità di fase dipende dalla polarizzazione dell'onda stessa. Come potete facilmente rendervi conto ricordando la definizione di velocità di fase, questo significa che in un materiale birifrangente l'indice di rifrazione (reale) dipende dalla polarizzazione.

### A. Dicroismo e polaroid

Il polarizzatore lineare a cui facciamo qui riferimento, chiamato gergalmente polaroid, dal nome commerciale di una famosa invenzione di circa un secolo fa, è un dispositivo che può essere modellato come una distribuzione spaziale di elementi in grado di assorbire la luce e allineati tra loro lungo una specifica direzione. Nell'invenzione originaria, e anche nella realtà odierna, almeno nella maggior parte dei casi, gli elementi assorbenti sono delle molecole di una qualche sostanza organica (spesso *cromofori*, cioè molecole di colorante). Queste molecole vengono disperse in una matrice polimerica, per esempio polivinilcol (PVA), che può essere stirata meccanicamente lungo una certa direzione. In seguito allo stiro, le molecole si allineano e si forma una sorta di sistema allineato di dipoli elettrici (questa descrizione è estremamente semplificata, ma può andare bene per i nostri scopi). Allora è evidente che un polaroid è un sistema che presenta un'anisotropia spaziale nell'assorbimento ottico.

Infatti, la radiazione polarizzata linearmente lungo l'asse di questi dipoli viene efficacemente assorbita, cioè viene trasmessa con forte attenuazione al di là dello strato di polaroid. Quella polarizzata linearmente in direzione ortogonale all'asse dei dipoli passa pressoché inalterata. Supponiamo di avere un'onda con campo elettrico di ampiezza  $E_0$  e polarizzazione  $\hat{e}$  generica (sul piano  $XY$ ) e immaginiamo che questa onda incida sul polaroid. Chiamando  $\hat{p}$  la direzione (sul piano  $XY$ ) ortogonale a quella dell'asse dei dipoli del polaroid (questa direzione corrisponde a quella di uno dei due assi ottici del dispositivo, l'altro asse ottico essendo allineato con i dipoli), avremo che l'ampiezza del campo in uscita dal polaroid è data dalla *proiezione*  $E_0 \hat{e} \cdot \hat{p} = E_0 \cos \theta$ , con  $\theta$  angolo compreso fra  $\hat{e}$  e  $\hat{p}$ . Poiché l'intensità di un'onda elettromagnetica è, come ricordato in precedenza, proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo, l'intensità in uscita,  $I$ , è legata a quella in ingresso,  $I_0$ , dalla relazione

$$I = I_0 \cos^2 \theta, \quad (17)$$

che qualche volta si chiama *legge di Malus*: si vede facilmente come l'intensità trasmessa dal polaroid si annulli per  $\theta = q\pi/2$ , con  $q$  intero *dispari* e diverso da zero, e dunque ha una "periodicità"  $\pi$ .

Oltre all'intensità, il passaggio attraverso questo tipo di polarizzatore implica anche una manipolazione della direzione di polarizzazione, che all'uscita risulta allineata a  $\hat{p}$ , coerentemente con l'operazione di proiezione lungo tale direzione che abbiamo introdotto.

Un'interessante applicazione sperimentale di tutto ciò può essere realizzata usando due polaroid, 1 e 2, messi uno dietro l'altro, e una sorgente di luce polarizzata linearmente (un laser). Supponiamo inizialmente di usare il solo polaroid 2 (il più "lontano" dalla sorgente) e di ruotarlo in modo da minimizzare la trasmissione della luce. Questo si ottiene quando i dipoli del polaroid 2 sono allineati rispetto alla direzione di polarizzazione della sorgente laser, cioè quando  $\hat{p}_2 \cdot \hat{e}_0 = 0$  (i simboli usati

dovrebbero risultare di immediata comprensione, in particolare  $\hat{e}_0$  è la direzione di polarizzazione della sorgente), ovvero  $\theta_2 = \pi/2$ . Ora interponiamo il polaroid 1 tra sorgente e polaroid 2: all'uscita del polaroid 1 il campo avrà un'ampiezza  $E_{0,1} = E_0 \hat{p}_1 \cdot \hat{e}_0 = E_0 \cos \theta_1$  e una direzione  $\hat{e}_1 // \hat{p}_1$ . Questa radiazione incide quindi sul polaroid 2, la cui rotazione è stata precedentemente aggiustata: all'uscita del polaroid 2 l'ampiezza del campo è

$$\begin{aligned} E_{0,2} &= E_{0,1} \hat{p}_2 \cdot \hat{e}_1 = E_0 \cos \theta_1 \hat{p}_2 \cdot \hat{p}_1 = E_0 \cos \theta_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &= E_0 \cos \theta_1 \cos(\pi/2 - \theta_1) = (E_0/2) \sin(2\theta_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Di conseguenza l'interposizione del polaroid 1 può far "riapparire" radiazione in uscita dal polaroid 2. Ricordando la relazione tra intensità e campi, si trova facilmente che all'uscita del polaroid 2 l'intensità vale

$$I_2 = (I_0/4) \sin^2(2\theta_1), \quad (20)$$

che si annulla per  $\theta_1 = q\pi/2$ , con  $q$  intero, e dunque ha una periodicità  $\pi/2$ .

La Fig. 4 mostra una rappresentazione schematica di due possibili esperimenti con uno (sopra) e due (sotto) polaroid, una sorgente (laser) polarizzata linearmente, e un rivelatore. Queste configurazioni sono quelle usate nell'esperienza pratica. Notate che in un polaroid ordinario "reale", specie se dotato di uno spessore sufficiente a maneggiarlo con facilità, la trasmissione non è mai completa neanche per polarizzazione ortogonale all'asse dei dipoli. Infatti un polaroid "reale" appare grigio, cioè semitrasparente, all'occhio, poiché il materiale di cui è composto assorbe in ogni caso (per qualsiasi polarizzazione) una certa parte della radiazione incidente. La conseguenza pratica è che il termine  $I_0$  che compare nelle Eqs. 17,20 è da intendersi come una frazione dell'intensità prodotta dalla sorgente. Inoltre, a causa dell'eventuale presenza di luce spuria raccolta dal fotorivelatore, nella pratica potrebbe essere necessario aggiungere alle Eqs. 17,20 un termine costante di offset.

### B. Birifrangenza e lamine ritardanti

Come già anticipato, esistono materiali per i quali l'indice di rifrazione (reale)  $n$  dipende dalla direzione di polarizzazione della luce che vi incide. Se ricordate la definizione, valida per i casi che stiamo esaminando,  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , questo vuol dire che tali materiali hanno una costante dielettrica anisotropa (una descrizione accurata richiederebbe di sostituire lo scalare  $\epsilon_r$  con un tensore). Avere materiali dielettrici trasparenti (altrimenti la luce non potrebbe passarvi dentro - e qui supponiamo di avere a che fare con materiali perfettamente trasparenti) anisotropi è generalmente molto semplice. Per esempio la maggior parte dei materiali trasparenti (o semi-trasparenti) che esistono in natura sono anisotropi, essendo anisotropa la loro struttura cristallina. Il quarzo, la calcite, la mica, materiali che possono essere estratti dalle miniere, presentano facilmente assi ottici ortogonali fra di loro (indicheremo qui le loro direzioni con  $\hat{a}_{//}$  e  $\hat{a}_{\perp}$ ) tali che

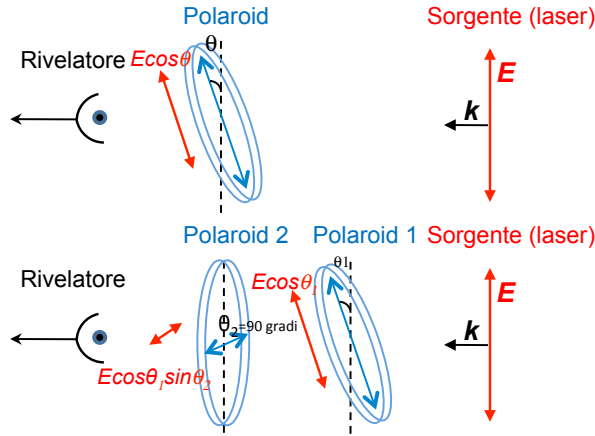


Figura 4. Illustrazione schematica di due possibili esperimenti con polaroid che fanno riferimento alle situazioni descritte nel testo e all'esperienza pratica.

l'indice di rifrazione è sensibilmente diverso per radiazione polarizzata lungo l'uno o l'altro di essi, comportando differenze  $\Delta n = |n_{//} - n_{\perp}|$  anche dell'ordine di 0.1.

Una *lamina ritardante* (si può chiamare in tanti altri modi) è una lastra, generalmente sottile, di materiale birifrangente con caratteristiche dimensionali e di birifrangenza opportune per ottenere determinati scopi di manipolazione della polarizzazione. In particolare, le *lamine*  $\lambda/4$  servono per rendere circolare o ellittica una polarizzazione originariamente lineare (o viceversa) e le *lamine*  $\lambda/2$  servono per ruotare in modo controllato la direzione di una polarizzazione lineare.

### 1. Lamina $\lambda/4$

Supponiamo di avere un campo elettromagnetico di ampiezza  $E_0$  e polarizzazione lineare lungo la bisettrice del piano  $XY$ , cioè con  $\hat{e} = (\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ . La funzione d'onda corrispondente può essere scritta come

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(kz - \omega t)])\hat{x} + (\exp[i(kz - \omega t)])\hat{y} \}. \quad (21)$$

Supponiamo che questa onda incida su un materiale (trasparente) birifrangente con un certo  $\Delta n$  e un certo spessore  $d$ , e supponiamo anche che i due assi ottici del materiale siano paralleli rispettivamente agli assi  $X$  e  $Y$ . Scriviamo quindi la funzione d'onda che descrive la radiazione che emerge dal materiale stesso. Ricordando che  $k = \omega/v = (\omega/c)n = k_0 n$ , dovremo in questo caso introdurre due diversi numeri d'onda,  $k_{//} = k_0 n_{//}$  e  $k_{\perp} = k_0 n_{\perp}$ , per tenere conto della birifrangenza. Notiamo anche che, per la scelta di orientamento che abbiamo fatto (serve solo per semplificare la matematica),  $k_{//}$  è il numero d'onda per la componente di campo incidente polarizzato lungo uno dei due assi cartesiani, per esempio  $X$ , e  $k_{\perp}$  per la componente polarizzata lungo l'altro asse.

L'onda emergente ha la stessa forma della funzione di Eq. 21 e anche la stessa ampiezza, essendo il materiale trasparente, ma la coordinata  $z$  dovrà essere calcolata nel punto che corrisponde alla fine dello strato di materiale, cioè, per semplicità, in  $z = d$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(k_{//}d - \omega t)])\hat{x} + (\exp[i(k_{\perp}d - \omega t)])\hat{y} \} \quad (22) \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(k_{//}d - \omega t)])\hat{x} + \exp[i(k_{\perp} - k_{//})d]\hat{y} \} \quad (23) \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza è stata fatta qualche semplice manipolazione algebrica.

In una lamina  $\lambda/4$  si ha  $(k_{\perp} - k_{//})d = k_0(n_{\perp} - n_{//})d = m\pi/2$ , con  $m$  intero dispari. Notiamo che, visto che  $k_0 = 2\pi/\lambda$ , si ha anche  $d(n_{\perp} - n_{//}) = m\lambda/4$ , cioè la differenza di *spessore ottico* (prodotto fra indice di rifrazione e spessore fisico) è un multiplo dispari di  $\lambda/4$ , da cui la denominazione del dispositivo.

In queste condizioni si vede che la differenza di indice di rifrazione, e quindi di velocità di fase, delle componenti lungo le due polarizzazioni introduce uno sfasamento di  $\pm\pi/2$  sulla componente  $Y$ . Quindi la radiazione, originariamente polarizzata lineare, diventa polarizzata circolare (destra o sinistra) a causa del passaggio attraverso la lamina. Inviando invece un'onda polarizzata circolarmente sulla lamina, in uscita si ottiene una polarizzazione lineare lungo la bisettrice del piano  $XY$ .

È facile infine verificare (ma qui non lo facciamo) che, se la polarizzazione incidente è diretta lungo una direzione che forma un angolo diverso da 45 gradi (la bisettrice del piano  $XY$ ), allora la polarizzazione in uscita è *ellittica* con una certa orientazione e rapporto degli assi.

### 2. Lamina $\lambda/2$

In una lamina  $\lambda/2$  si ha invece  $(k_{\perp} - k_{//})d = k_0(n_{\perp} - n_{//})d = m\pi$ , con  $m$  intero dispari, ovvero  $d(n_{\perp} - n_{//}) = m\lambda/2$ . Si verifica facilmente che in queste condizioni non si produce alcuno sfasamento tra le componenti, per cui l'onda in uscita dalla lamina resta polarizzata linearmente. Però la lamina agisce cambiando il segno di una componente rispetto all'altra: di conseguenza con una lamina a  $\lambda/2$  la polarizzazione lineare diretta a 45 gradi rispetto agli assi viene cambiata di segno, con un effetto nullo sulla direzione.

Molto più interessante è verificare cosa succede se la radiazione incidente ha una polarizzazione lineare che forma un angolo  $\phi$  generico (diverso da  $\pi/4$ ) con un asse ottico del materiale birifrangente, per esempio con quello che abbiamo supposto parallelo all'asse  $X$ . In questo caso la funzione che descrive l'onda che emerge dalla lamina si scrive

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ \cos \phi (\exp[i(k_{//}d - \omega t)])\hat{x} + \quad (24)$$

$$+ \sin \phi (\exp[i(k_{\perp}d - \omega t)])\hat{y} \} = \quad (25)$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\exp[i(k_0 d - \omega t)]) (\cos \phi \hat{x} - \sin \phi \hat{y}), \quad (26)$$

che mostra come la polarizzazione in uscita sia ancora lineare, ma diretta lungo una direzione diversa da quella di ingresso. In particolare, tenendo conto del cambio di segno operato su una delle due componenti, si ha che si forma un angolo  $2\phi$  tra la direzione originaria e quella ottenuta in uscita dalla lamina, cioè la lamina  $\lambda/2$  produce una rotazione di  $2\phi$  della direzione di polarizzazione lineare *senza attenuazione* dell'intensità (che è invece presente quando si usa un polaroid, o altro sistema dicroico).

La Fig. 5 mostra, in maniera molto schematica, due possibili e tipici impieghi delle lamine  $\lambda/4$  (per convertire la polarizzazione lineare in polarizzazione circolare) e  $\lambda/2$  (per ruotare la direzione di una polarizzazione lineare).

Infine è facile rendersi conto che una lamina ritardante "ideale" si comporta come ci si aspetta solo a una determinata lunghezza d'onda. Fortunatamente esistono dispositivi, generalmente di materiale plastico e quindi relativamente economici, che continuano a funzionare in modo ragionevole su un intervallo di lunghezze d'onda abbastanza esteso per permetterne l'uso pratico. Tuttavia, proprio a causa della possibilità di operare in un largo spettro di lunghezze d'onda, tali lamine, quando investite da una radiazione polarizzata linearmente, producono una polarizzazione generalmente ellittica.

Dal punto di vista pratico, la polarizzazione ellittica può essere qualitativamente individuata facendo seguire alla lamina ritardante un polaroid, e misurando l'intensità trasmessa dal polaroid. Ruotandolo, l'intensità non si annulla mai, a differenza di quanto avverrebbe con polarizzazione lineare. In particolare, se l'intensità misurata risulta indipendente dall'angolo di rotazione del polaroid, allora la polarizzazione emergente dalla lamina è perfettamente circolare.

#### IV. FRESNEL E BREWSTER

In ottica, un modo storicamente e concettualmente importante per manipolare la polarizzazione di una radiazione è quello che fa uso dell'incidenza al cosiddetto angolo di Brewster. In questo caso non si impiegano materiali dicroici o birifrangenti, ma si sfruttano le conseguenze delle regole che stabiliscono il comportamento di un'onda all'interfaccia tra due dielettrici con diverso indice di rifrazione, regole che qualche volta si chiamano *equazioni di Fresnel*.

Questo argomento fa normalmente parte di qualsiasi corso di "Fisica 2", dove esso è anche contestualizzato a dovere. In questa nota ci limitiamo a ripercorrere rapidamente i concetti di base e i passaggi necessari per ricavare alcune delle equazioni di Fresnel, in particolare quelle che sono più strettamente connesse all'esistenza di un angolo di incidenza speciale, detto *angolo di Brewster*, per il quale la riflessione dall'interfaccia segue un andamento specifico per le varie componenti di polarizzazione.

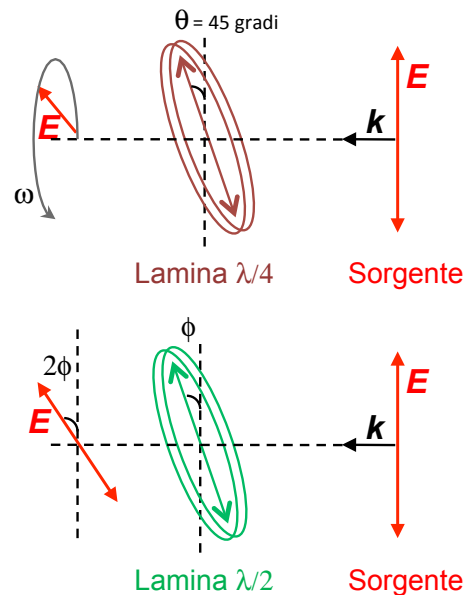


Figura 5. Illustrazione schematica per riassumere due situazioni di impiego pratico per lamine ritardanti.

#### A. Cenni alle equazioni di Fresnel e al procedimento per ricavarle

Supponiamo un'onda elettromagnetica che incide, propagandosi lungo la direzione  $\hat{k}_i$ , sull'interfaccia tra due materiali dielettrici con indice di rifrazione rispettivamente  $n_1$  e  $n_2$  (ovviamente diversi tra loro). La direzione di incidenza forma un angolo  $\theta_i$  con la normale all'interfaccia nel punto di incidenza: la normale e  $\hat{k}_i$  appartengono a un piano che si chiama *piano di incidenza*. Supponendo che il materiale sia trasparente, o semi-trasparente, l'onda incidente darà luogo a:

- un'onda trasmessa, o rifratta, che si propaga nel mezzo con indice di rifrazione  $n_2$  lungo la direzione  $\hat{k}_t$  e tale che, per la legge di Snell, tra angolo di trasmissione e di incidenza vale la relazione  $\sin \theta_t / \sin \theta_i = n_1 / n_2$  (per salvaguardare la generalità delle nostre conclusioni supponiamo ovviamente che  $\theta_i < \theta_{crit}$ , con  $\theta_{crit} = \arcsin(n_2/n_1)$  angolo critico, al di sopra del quale si ha "riflessione totale");
- un'onda riflessa che si propaga nel mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  lungo la direzione  $\hat{k}_r$  e tale che l'angolo di riflessione è  $\theta_r = \theta_i$ .

Se ci pensate un attimo e osservate la Fig. 6, che riporta tutte le grandezze geometriche rilevanti per la spiegazione, potete facilmente rendervi conto che esistono due situazioni diverse a seconda che la polarizzazione dell'onda incidente appartenga al piano di incidenza [pannello (a) della figura] o sia ortogonale a questa [pannello (b)]. Le



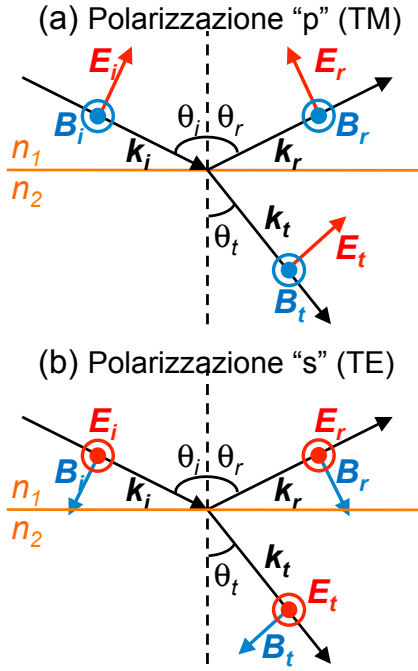


Figura 6. Geometria e simbologia utili per ricavare le equazioni di Fresnel nel caso di polarizzazione “p” (TM) e “s” (TE) [pannelli rispettivamente (a) e (b)].

due situazioni hanno un paio di denominazioni storiche rilevanti:

- se la polarizzazione è parallela al piano di incidenza si indica con la lettera “p”, altrimenti con la lettera “s”, dalle iniziali dei termini tedeschi che significano rispettivamente parallelo e ortogonale;
- se la polarizzazione è parallela al piano di incidenza, allora si indica l’onda come TM, a significare che il campo magnetico è trasverso al piano di incidenza, altrimenti si indica l’onda come TE, a significare che il campo elettrico è trasverso al piano di incidenza.

La Fig. 6 riporta anche, in forma grafica, diverse affermazioni che in gran parte possiamo ritenere ovvie, ma che richiederebbero dimostrazione (la potete trovare nei testi di elettromagnetismo e ottica). Per esempio: i tre vettori d’onda delle tre onde che stiamo considerando appartengono tutti al piano di incidenza, per ogni onda  $\hat{k}, \hat{e}, \hat{b}$  formano una terna ortogonale destrorsa e *scegliamo* di rappresentare i versi come rappresentato. Inoltre un’altra affermazione generale, anch’essa piuttosto ovvia, ma dimostrabile in modo rigoroso, è che nel passaggio da un mezzo all’altro la *frequenza* (o frequenza angolare) della radiazione non cambia, non essendo preso in considerazione nessun fenomeno che sia in grado di modificarla. Di conseguenza, è la lunghezza d’onda, ovvero il numero d’onda, che cambiano passando da un mezzo all’altro.

All’interfaccia devono valere le condizioni di continuità, o di raccordo, dei campi, che possono essere dedotte dall’integrazione delle equazioni di Maxwell. In particolare si conservano:  $D_{\perp}, B_{\perp}, E_{//}, H_{//}$ . Poiché siamo nel reame dell’ottica convenzionale e immaginiamo anche in questo caso che i materiali siano omogenei, isotropi, e “lineari”, la conservazione di  $D_{\perp}$  equivale a quella di  $\epsilon_r E_{\perp}$ , mentre quella di  $H_{//}$  equivale alla conservazione di  $B_{//}$  (e qui abbiamo usato la circostanza che  $\mu = \mu_0$  dappertutto).

Le leggi di Fresnel si ottengono imponendo le condizioni di continuità all’interfaccia nel punto di incidenza. Dato che la frequenza della radiazione non cambia nel passaggio tra i mezzi e che si vuole, naturalmente, che le condizioni di continuità valgano *in ogni istante*, allora le conservazioni di cui sopra valgono anche tra le *ampiezze* dei vari campi coinvolti. Questo permette di semplificare la trattazione: infatti sappiamo che la relazione tra le ampiezze di campo elettrico e magnetico della stessa onda recita  $E_0 = vB_0 = (c/n)B_0$ , cosa che consente, quando necessario, di convertire le condizioni di continuità sulle componenti dei campi magnetici in condizioni di continuità sulle componenti dei corrispondenti campi elettrici.

## B. Onda TM o polarizzazione “p”

Ci limitiamo a considerare la situazione descritta in Fig. 6(a), dato che questa è sufficiente per individuare l’esistenza dell’angolo di Brewster. Abbiamo a disposizione quattro condizioni di continuità sulle ampiezze, ma, essendo tre le incognite che ci interessano (le ampiezze  $E_{0i}, E_{0r}, E_{0t}$  delle onde incidente, riflessa, trasmessa), basta usarne due per determinare il legame tra le incognite e risolvere il problema che vogliamo trattare.

Dalla continuità di  $H_{//}$ , che è diventata continuità di  $B_{//}$  e di qui continuità delle ampiezze di  $nE_{//}$ , abbiamo

$$n_1(E_{0i} + E_{0r}) = n_2 E_{0t} , \quad (27)$$

che si può anche scrivere

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \frac{n_2}{n_1} . \quad (28)$$

Dalla continuità di  $E_{//}$  abbiamo invece, notando la geometria del problema e l’orientazione dei vettori che tiene conto della necessità di avere terne destrorse per le varie onde (da cui un non irrilevante segno meno),

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t , \quad (29)$$

che, notando che  $\theta_i = \theta_r$ , si può anche scrivere

$$E_{0i} - E_{0r} = E_{0t} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} . \quad (30)$$

Combinando le Eqs. 28 e 30 si ottiene che il rapporto  $r_p$  tra le ampiezze dell’onda riflessa e di quella incidente, detto talvolta *riflettività in ampiezza*, è, per

polarizzazione “p”:

$$r_p = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}. \quad (31)$$

Poiché in genere si è interessati a conoscere il rapporto tra le intensità, o potenze, delle onde, che, come già stabilito, dipendono dal quadrato delle ampiezze, conviene definire e determinare anche la *riflettanza* per polarizzazione “p”,  $R_p$ , tale che, per la conservazione del flusso di energia,  $R_p + T_p = 1$  (con  $T_p$  ovviamente definita *trasmittanza*):

$$R_p = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 = \left| \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right|^2. \quad (32)$$

Per avere un’idea del valore numerico di  $R_p$  poniamoci nel caso, semplicissimo, di incidenza normale, cioè  $\theta_i = \theta_t = 0$ . È evidente che in questo caso le situazioni di polarizzazione p e s non sono distinguibili, per cui  $R_p = R_s$ , con ovvio significato dei simboli. Supponiamo allora di incidere normalmente su un’interfaccia aria-vetro ( $n_2 = n_{\text{vetro}} \approx 1.5$ , per il vetro ordinario, mentre  $n_1 = n_{\text{aria}} \approx 1$ ), dove supponiamo di usare luce nel visibile, per esempio di colore rosso. Si ottiene  $R_p = |(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)|^2 \approx 0.04$ , cioè circa il 4% della potenza incidente viene riflessa. Questo è il motivo per cui, in certe situazioni di illuminazione, vediamo in maniera abbastanza nitida la nostra faccia riflessa dal vetro di una finestra.

Ricordando che, per la legge di Snell, si ha  $n_2/n_1 = \sin \theta_i / \sin \theta_t$ , e usando in modo opportuno le relazioni tra le varie funzioni trigonometriche, si ha che  $R_p$  si può scrivere nella seguente forma compatta (vi invito a verificare facendo tutti i passaggi del caso, che qui non riporto):

$$R_p = \left| \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right|^2. \quad (33)$$

Il numeratore della frazione non può mai azzerarsi, dato che, per Snell e assumendo  $n_1 \neq n_2$ , è sempre  $\theta_i \neq \theta_t$ . Però può esistere un angolo  $\theta_B$ , detto *angolo di Brewster*, tale che per  $\theta_i = \theta_B$  il denominatore tende a infinito, cioè  $R_p \rightarrow 0$ .

Per determinare univocamente l’angolo  $\theta_B$  in funzione dei valori  $n_1$  e  $n_2$  occorre usare di nuovo la legge di Snell, che individua  $\theta_t$  in funzione di  $\theta_i$ . Il procedimento non è molto diretto. Si può partire notando che

$$\tan(\theta_i + \theta_t) = \frac{\tan \theta_i + \tan \theta_t}{1 - \tan \theta_i \tan \theta_t}, \quad (34)$$

per cui la condizione che stiamo cercando implica

$$1 = \tan \theta_i \tan \theta_t, \quad (35)$$

ovvero

$$\sin \theta_i \sin \theta_t = \cos \theta_i \cos \theta_t = \sqrt{(1 - \sin^2 \theta_i)(1 - \sin^2 \theta_t)}. \quad (36)$$

Facendo il quadrato di entrambi i membri e usando la legge di Snell si trova

$$\left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - 1. \quad (37)$$

Questa equazione è soddisfatta, e dunque l’angolo  $\theta_B$  è determinato, quando

$$\tan \theta_i = \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (38)$$

Dunque, supponendo come prima di esaminare l’interfaccia aria-vetro e usando luce visibile, si ha  $\theta_B = \arctan(n_{\text{vetro}}/n_{\text{aria}}) \approx 56$  gradi.

### 1. Rilevanza e interpretazione fisica dell’angolo di Brewster

Riassumendo la tanta matematica che abbiamo svolto, possiamo affermare che abbiamo trovato che esiste un angolo di incidenza, determinato dal rapporto tra gli indici di rifrazione (reali) dei mezzi che formano l’interfaccia, tale che *se incidiamo con questo angolo la componente di polarizzazione parallela al piano di incidenza non viene riflessa*.

In termini pratici, se inviamo a questa interfaccia radiazione con polarizzazione random, come quella prodotta da una lampada a filamento, all’angolo di Brewster noteremo una sensibile diminuzione della intensità della radiazione riflessa, dato che in queste condizioni le componenti di polarizzazione p non saranno riflesse. Inoltre, e come diretta conseguenza, la radiazione riflessa conterrà solo componenti di polarizzazione s, per cui sarà polarizzata. Selezionando con un polaroid solo le componenti di polarizzazione p della sorgente o della radiazione riflessa, si osserverà che la riflessione si annulla pressoché completamente.

La possibilità di manipolare la radiazione tramite incidenza su un’interfaccia all’angolo di Brewster è sfruttata in molti dispositivi, per esempio nei laser a gas, dove essa serve a diminuire le perdite per riflessione da parte della cavità risonante (vedrete in seguito il significato di questa terminologia).

Un’applicazione curiosa è nell’impiego di lenti per occhiali da sole trattate con filtri polarizzatori. Infatti il nome polaroid richiama alla maggior parte delle persone il marchio di lenti da occhiali da sole, che, appunto, sono rivestite di uno strato di polaroid. Quando si va in barca a vela, si scia sulla neve, o si guida un’automobile, o un aeroplano, in un giorno di sole, si può rimanere abbagliati a causa dell’intenso riverbero, o riflesso, da superfici dielettriche piane collocate all’orizzonte (la strada, la neve, il mare, etc.), che hanno tutte indice di rifrazione tipicamente prossimo a quello del vetro. La direzione di osservazione di queste superfici, normalmente lontane dall’osservatore e collocate più o meno all’“orizzonte”, è più o meno all’angolo di Brewster, che dunque è anche l’angolo con cui la luce del sole, che può essere considerata polarizzata random, incide sull’interfaccia tra aria

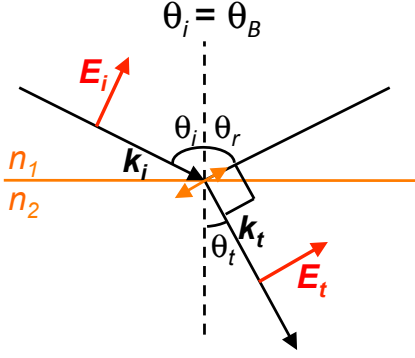


Figura 7. Rappresentazione schematica utile per dare un'interpretazione fisico/geometrica dell'esistenza dell'angolo di Brewster  $\theta_B$ : per incidenza a questo angolo, nel solo caso di polarizzazione "p", si ha che il dipolo all'interno del dielettrico con indice di rifrazione (reale)  $n_2$  oscilla lungo la direzione indicata con la doppia freccia in figura. La riflessione tende ad annullarsi, dato che l'angolo di riflessione visto nel mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  corrisponde alla direzione dell'asse del dipolo oscillante, dove il pattern di radiazione è nullo.

a mezzo che riverbera. La riflessione contiene soprattutto le componenti di polarizzazione s: dunque se la lente contiene un filtro polarizzatore opportunamente orientato, e quindi in grado di assorbire, in maniera più o meno efficace, queste componenti, l'abbagliamento è attenuato.

Facciamo ora qualche considerazione geometrica utile per dare un'interpretazione fisica semplice da ricordare (molto più semplice di tutti i conti fatti sopra) per l'esistenza dell'angolo di Brewster. Abbiamo notato che per incidenza a questo angolo, cioè per  $\theta_i = \theta_B$ , si ha  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ . Come illustrato in Fig. 7, in queste condizioni si ha che le direzioni di propagazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa, cioè  $\hat{k}_r$  e  $\hat{k}_t$ , formano un angolo retto (ricordate che  $\theta_r = \theta_i$ , per cui  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$  implica  $\theta_r + \theta_t = \pi/2$ , da cui l'affermazione fatta). L'onda riflessa e quella trasmessa possono essere considerate come generate dalla radiazione dei dipoli del materiale con indice di rifrazione (reale)  $n_1$  eccitati dal campo elettrico dell'onda incidente. Poiché tali dipoli si trovano all'interno del materiale, essi vedono un'onda incidente la cui direzione di propagazione è stata rifratta, cioè è stata modificata rispetto a quella originaria in seguito al passaggio attraverso l'interfaccia. Dunque i dipoli vengono eccitati dal campo dell'onda che si propaga lungo  $\hat{k}_t$ . A causa dell'ortogonalità dell'onda elettromagnetica, tale campo ha una direzione di polarizzazione specifica, che in figura è rappresentata dalla doppia freccia. Per incidenza all'angolo di Brewster (e, ovviamente, solo nel caso di polarizzazione incidente p), la direzione in cui oscillano i dipoli coincide con quella di osservazione dell'onda riflessa. Ricordando che un dipolo elettrico oscillante non emette radiazione lungo la direzione del proprio asse, si ottiene una buona spiegazione del perché in queste condizioni l'onda riflessa si annulli.

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = t_s - 1,$$

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = r_s + 1,$$

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i},$$

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}.$$

Figura 8. Quadretto riassuntivo per le riflettività  $r_s$  e  $r_p$  e trasmittività  $t_s$  e  $t_p$  in ampiezza per i due tipi di polarizzazione "s" e "p".

### C. Onda TE o polarizzazione "s" e quadro di sintesi

Un approccio simile a quello utilizzato in precedenza può essere applicato anche per determinare il rapporto tra le ampiezze dei campi, e quindi riflettività  $r_s$  e riflettanza  $R_s$ , nel caso di polarizzazione s, cioè con campo elettrico trasverso al piano di incidenza [Fig. 6(b)]. Non si riportano qui i passaggi e la tanta matematica necessaria, ma si cita solo il risultato finale, che è

$$R_s = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \quad (39)$$

$$= \left| \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right|^2. \quad (40)$$

Si può verificare abbastanza facilmente come per questa polarizzazione non esista un angolo  $\theta_i$  in grado di annullare la riflettività, dunque l'angolo di Brewster "non esiste" per polarizzazione s. Inoltre, dato che anche in questo caso il flusso di energia si conserva, cioè deve essere  $1 = R_s + T_s$ , si capisce come  $T_s$  sia una funzione piuttosto complicata e sicuramente non costante dell'angolo di incidenza, aspetto che può essere rilevante per capire l'osservazione sperimentale della trasmissione di luce polarizzata random attraverso un pacco di lastre dielettriche.

Per comodità, si riportano in Figs. 8 e 9 un quadretto riassuntivo per le riflettività  $r_s$  e  $r_p$  e trasmittività  $t_s$  e  $t_p$  in ampiezza per i due tipi di polarizzazione s e p, e il risultato di un calcolo numerico per le riflettanze  $R_s$  e  $R_p$  nel caso di singola interfaccia aria/vetro (materiale proveniente da wikipedia).

#### 1. Effetti dell'angolo di Brewster in trasmissione

Gli effetti dell'esistenza dell'angolo di Brewster sono particolarmente evidenti quando si eseguono osservazioni in riflessione: il fascio riflesso di una luce non polarizzata che incide all'angolo  $\theta_i = \theta_B$  non contiene la componente p di polarizzazione, dunque esso è polarizzato unicamente s.

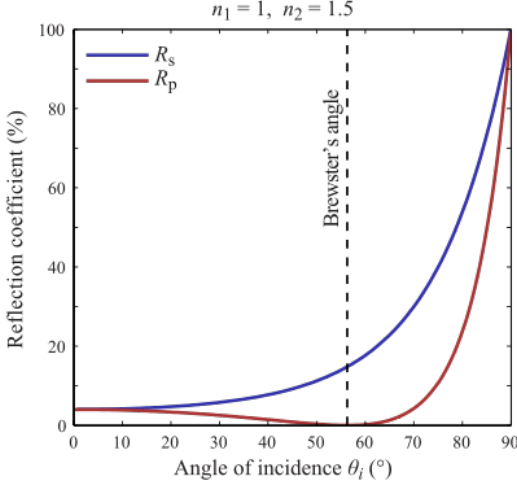


Figura 9. Risultato di un calcolo numerico per le riflettanze  $R_s$  e  $R_p$  nel caso di singola interfaccia aria/vetro.

Vediamo le caratteristiche di polarizzazione del fascio trasmesso (sempre supponendo che  $\theta_i = \theta_B$ ). Per la conservazione dei flussi di energia si ha in generale per la trasmittanza

$$T_p = 1 - R_p = 1 - \left| \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right|^2 \quad (41)$$

$$T_s = 1 - R_s = 1 - \left| \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right|^2. \quad (42)$$

Per incidenza all'angolo di Brewster si ha  $\theta_t + \theta_B = \pi/2$ , per cui  $T_p = 1$  e  $T_s = 1 - |\sin(\theta_t - \theta_B)|^2 = \cos^2(\theta_t - \theta_B)$ . Inoltre vale la legge di Snell, per cui  $\theta_t = \arcsin(n_1 \sin \theta_B / n_2)$ . Evidentemente la componente p, non riflessa all'interfaccia, viene completamente trasmessa, mentre quella s viene attenuata di un certo fattore.

Per avere un'idea di quanto valga questo fattore di attenuazione, stimiamo  $T_s$  nel caso di incidenza all'angolo di Brewster per un'interfaccia aria/vetro, dove  $\theta_B \approx 56$  gradi e quindi  $\theta_t \approx 34$  gradi. Di conseguenza  $T_s \approx 0.85$ , cioè circa l'85% della radiazione incidente polarizzata s viene trasmessa. Su una singola interfaccia è difficile rendersi conto a occhio dell'attenuazione provocata dal fenomeno. Però, se si pongono in serie numerose interfacce aria/vetro (o aria/PMMA, un materiale che ha un indice di rifrazione simile a quello del vetro), cioè se si usa un pacco di lastre dielettriche trasparenti, tutte ovviamente intervallate da sottili strati di aria, allora l'effetto complessivo potrà diventare osservabile. Infatti, detto  $m$  il numero di interfacce che il fascio incidente deve attraversare prima di essere osservato, la trasmissione totale per la componente polarizzata s è  $T_{s,tot} = T_s^m$ . Supponendo per esempio  $m = 8$ , si ha, nelle condizioni che stiamo trattando,  $T_{s,tot} \approx 0.28$ , mentre per  $m = 12$  si ha  $T_{s,tot} \approx 0.15$  e per  $m = 16$   $T_{s,tot} \approx 0.08$ . Se ricordiamo che, invece, la componente p attraversa le interfacce senza perdere intensità, possiamo concludere che all'uscita di un pacco di lastre dielettriche la luce non polarizzata e incidente all'angolo di Brewster sulla prima interfaccia risulta *quasi* (per oltre il 90% nel caso in cui si impieghino 16 interfacce) completamente polarizzata p.