

Risonanze

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 8 - FF, 25 marzo 2017)

Questa breve nota tratta alcuni aspetti (soprattutto di calcolo) relativi all'esercitazione sull'oscillatore RLC forzato e smorzato e propone qualche spunto di riflessione ulteriore sulla tematica della risonanza.

I. INTRODUZIONE

Il fenomeno della risonanza è probabilmente tra quelli che hanno la più ampia applicazione in fisica e anche in tante altre discipline (ehm, si direbbe nel linguaggio comune che la risonanza ha la più ampia risonanza...). Inutile fare un elenco delle situazioni in cui la risonanza occupa un posto di rilievo ed è anche inutile ricordare gli effetti eclatanti della risonanza (per esempio, i ponti che crollano che campeggiano nei libri delle scuole medie, esempio di risonanza in realtà piuttosto opinabile). L'aspetto più importante del fenomeno è che, in risonanza, si stabilisce un efficace trasferimento di potenza da una sorgente (la forzante) a un sistema (qui modellato come un oscillatore armonico smorzato).

Per fare riferimento specifico a quanto svolto nell'esperienza pratica, il circuito che si comporta da oscillatore smorzato e forzato, mostrato in Fig. 1, comprende due resistori che tengono conto della resistenza interna dell'induttore, r , e di una resistenza esterna, R . Inoltre lo schema mostra anche la presenza di un ulteriore elemento resistivo, la resistenza interna del generatore r_G (non si mostra invece la resistenza interna dello strumento di misura, l'oscilloscopio, che riteniamo produca effetti trascurabili). Sono anche indicati i segnali (differenze di potenziale) misurate nell'esperienza, V_{in} e V_{out} .

Detta $V_{0G} \cos(\omega t) = V_G(t)$ la differenza di potenziale applicata alla maglia, l'equazione del circuito nel dominio del tempo è:

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{R'}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{V_{0G}}{L} \cos(\omega t), \quad (1)$$

con $R' = r + R + r_G$. La soluzione di questa equazione può sicuramente essere condotta nel dominio del tempo con i metodi "ordinari" a voi già noti: si ottiene che esiste una soluzione oscillante a frequenza ω .

Se ci restringiamo a considerare la soluzione a regime, quella che si stabilisce dopo un transiente iniziale (di durata paragonabile a $\tau = 2L/R'$, un tempo che, nelle nostre osservazioni sperimentali, è generalmente breve rispetto a quello di misura), allora possiamo fare ottimo uso del metodo simbolico, che consiste, in sostanza, nell'indicare come grandezze complesse (oscillanti) tensioni e correnti. L'equazione del circuito in questo contesto si scrive

$$V_{\omega G} = Z_{tot} I_{\omega} \quad (2)$$

dove $V_{\omega G}$ e I_{ω} sono i fasori che rappresentano rispettivamente il segnale prodotto dal generatore, supposto ideale,

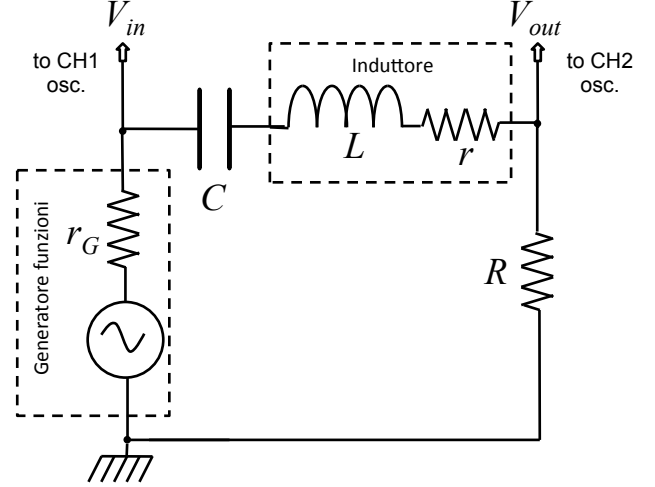


Figura 1. Circuito dell'oscillatore risonante (serie) considerato nel testo.

e la corrente che circola nella maglia e

$$Z_{tot} = R' + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = \frac{j\omega R' C + 1 - \omega^2 LC}{j\omega C} \quad (3)$$

è l'impedenza totale del circuito, dato dalla serie dei componenti che costituiscono la maglia.

In sostanza, quindi

$$V_{\omega G} = \frac{j\omega R' C + 1 - \omega^2 LC}{j\omega C} I_{\omega}. \quad (4)$$

Il segnale indicato con V_{out} in figura è, supponendo l'impedenza interna dell'oscilloscopio molto più grande delle altre impedenze in gioco, come in genere si verifica, la caduta di tensione ai capi della resistenza R . Dunque, tornando alla notazione simbolica e facendo un po' di pulizia, si ha

$$V_{\omega out} = \frac{j\omega RC}{j\omega R' C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{\omega G}, \quad (5)$$

con $\omega_0^2 = 1/LC$. Possiamo quindi determinare una funzione di trasferimento complessa $T_G(\omega)$ tale che $V_{\omega out} = T_G(\omega) V_{\omega G}$:

$$T_G(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega R' C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (6)$$

Si vede subito che, per $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, un pezzo del denominatore si annulla, cosa che, almeno intuitivamente, ha a che fare con la risonanza.

Nella pratica, generalmente si preferisce definire la funzione di trasferimento come quella che lega i segnali osservati sperimentalmente, cioè V_{out} e V_{in} ; quest'ultimo segnale differisce da V_G per la caduta di potenziale sulla resistenza interna del generatore r_G , cioè si ha, per i fasori corrispondenti:

$$V_{win} = V_{\omega G} - r_G I_{\omega} = V_{\omega G} \left(1 - r_G \frac{j\omega C}{j\omega R' C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} \right), \quad (7)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione di I_{ω} trovata prima.

Invertendo l'equazione e usando un minimo di algebra si trova

$$V_{\omega G} = \frac{j\omega R' C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{win}, \quad (8)$$

che, sostituita nell'Eq. 5, conduce a

$$V_{\omega out} = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{win}. \quad (9)$$

La funzione di trasferimento complessa $T(\omega)$ tale che $V_{\omega out} = T(\omega)V_{win}$ è allora

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (10)$$

È evidente che essa approssima e viene approssimata da quella espressa in Eq. 6 se $R' \sim (R+r)$, cioè, come atteso, se la resistenza interna del generatore è trascurabile, ovvero $r_G \ll (R+r)$.

A. Risonanza nella serie e nel parallelo condensatore/induttore

Prima di proseguire con quel poco di matematica che serve a caratterizzare la risonanza, ricordiamo qui da dove questo fenomeno ha origine nella tipologia di circuiti di cui ci stiamo occupando, con lo scopo principale di puntualizzare tutti gli aspetti più semplici e immediati da capire. A questo scopo, facciamo riferimento a una situazione ideale, in cui immaginiamo che sia possibile avere un induttore in cui la resistenza interna dovuta all'avvolgimento del filo sia completamente trascurabile. In altre parole, immaginiamo di avere un componente che presenta un'impedenza solo *reattiva*, con un'induttanza di valore L . Supponiamo che questo componente sia *in serie* a un condensatore C . L'impedenza complessiva della serie è $Z_{tot} = 1/(j\omega C) + j\omega L = (1/(j\omega C))(1 - \omega^2 LC)$: per un certo valore della frequenza (angolare), cioè a *risonanza*, ovvero per $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, l'impedenza totale Z_{tot} si annulla.

Se ragionate in termini di rappresentazione dell'impedenza sul piano complesso, la situazione è semplice da

descrivere: l'impedenza del condensatore è un vettore spostato lungo l'asse immaginario e orientato verso il basso (verso negativo), quella dell'induttore è un vettore di analoga direzione ma verso opposto. I moduli di questi vettori, cioè delle impedenze considerate, dipendono dalla frequenza: a una certa frequenza, cioè a risonanza, essi sono uguali e la somma dei due vettori, che è l'impedenza risultante, si annulla.

In una maniera ancora più limpida e convincente, che fa sempre uso della rappresentazione sul piano complesso, notiamo che nel collegamento in serie è il fasore corrente I_{ω} a essere in comune ai due elementi (induttore e condensatore). Il fasore $V_{\omega C}$ che rappresenta la d.d.p. ai capi del condensatore risulta anticipato di $\pi/2$ rispetto a I_{ω} , e di lunghezza (modulo) dipendente in modo inversamente proporzionale alla frequenza. Il fasore $V_{\omega L}$ è invece ritardato di $\pi/2$ rispetto a I_{ω} , e la sua lunghezza è direttamente proporzionale alla frequenza: i due fasori che rappresentano le d.d.p. sono quindi mutamente sfasati di π . Per una data frequenza, quella di risonanza, la somma delle due d.d.p., $V_{\omega serie} = V_{\omega C} + V_{\omega L}$, rappresentata da due fasori antiparalleli tra loro, si annulla, cioè la serie LC si comporta come un cortocircuito, dunque con impedenza nulla.

Vediamo brevemente cosa succede se i due componenti considerati vengono collegati in parallelo. Stavolta l'impedenza totale è $Z_{tot} = (j\omega C + 1/(j\omega L))^{-1} = (j\omega L)/(1 - \omega^2 LC)$: in questo caso alla risonanza l'impedenza tende a infinito, cioè non c'è corrente che passa attraverso il parallelo dei due componenti. Infatti, usando lo stesso approccio di prima, stavolta è la d.d.p. V_{ω} a essere in comune ai due componenti montati in parallelo. È facile rendersi conto che, impiegando una simbologia facilmente comprensibile, in questo caso $I_{\omega C}$ è posticipata di $\pi/2$ rispetto a V_{ω} , mentre $I_{\omega L}$ è ritardata di $\pi/2$. Di nuovo i moduli dei fasori che rappresentano la corrente che passa per il condensatore e per l'induttore hanno un modulo dipendente dalla frequenza e risultano sfasati reciprocamente di π . A una data frequenza, quella di risonanza, le due correnti sono opposte, e si ha che $I_{\omega parallelo} = I_{\omega C} + I_{\omega L}$ si annulla. Il parallelo allora si comporta come un circuito aperto, ovvero la corrente fluisce nel parallelo di induttore e condensatore e non ne esce fuori.

Ovviamente se aggiungiamo un elemento resistivo, fosse anche solo la resistenza interna r dell'induttore, le affermazioni appena fatte si modificano in maniera rilevante. Per esempio è facile rendersi conto che nel circuito serie anche a risonanza c'è un'impedenza non nulla (la r , che è in serie a tutto il resto) e che nel circuito in parallelo anche a risonanza l'impedenza è finita (la r che è in serie alla L , ovvero in parallelo a C). Di conseguenza, nel caso reale ci si aspetta che gli effetti della risonanza siano meno eclatanti. Infatti, come ben sapete dallo studio di altre situazioni fisiche, considerare una "dissipazione" (e la resistenza è un componente che "dissipa" per effetto Joule), cioè un attrito, conduce sempre ad attenuare gli effetti della risonanza.

B. Risposta in frequenza

La funzione di trasferimento $T(\omega)$ di Eq. 10, che è complessa, fornisce informazioni sia sull'attenuazione, o guadagno, del circuito, che sullo sfasamento del segnale in uscita rispetto a quello in ingresso attraverso rispettivamente il suo modulo, che indichiamo con $A(\omega)$, e il rapporto tra parte immaginaria e parte reale, che indichiamo con $\tan(\Delta\phi)$.

Razionalizzando la funzione espressa nell'Eq. 10 si ha

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC[(1 - (\omega/\omega_0)^2) - j\omega(R+r)C]}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega(R+r)C)^2}. \quad (11)$$

Lo sfasamento tra V_{out} e V_{in} dipende dalla frequenza secondo la:

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{\text{Im}\{T(\omega)\}}{\text{Re}\{T(\omega)\}} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\omega(R+r)C}. \quad (12)$$

Si vede subito un aspetto molto molto significativo: *lo sfasamento si annulla a risonanza* e cambia di segno passando per la risonanza stessa ($\phi \rightarrow \pm\pi/2$ rispettivamente per $\omega \rightarrow 0$ o $\omega \rightarrow \infty$). Ciò ha una conseguenza estremamente interessante in termini *sperimentali*: a risonanza, lo sfasamento è nullo. Lo sfasamento può essere osservato facilmente (e con ottima sensibilità) usando diversi strumenti, il più semplice dei quali consiste nel visualizzare i segnali V_{in} e V_{out} all'oscilloscopio in modalità X-Y: sullo schermo appare in genere una ellisse che, a risonanza, degenera in un segmento *inclinato*. Questo consente di individuare rapidamente la frequenza di risonanza di un oscillatore armonico forzato.

Veniamo ora alla determinazione di $A(\omega)$, cioè troviamo quella che spesso si chiama la *curva di risonanza*, o lo *spettro di risonanza*, o, ancora, la *forma di riga* del nostro oscillatore. Si ha:

$$A(\omega) = |T(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega(R+r)C)^2 + (1 - (\omega/\omega_0)^2)^2}}. \quad (13)$$

A risonanza un pezzo del denominatore si annulla e si ha $A(\omega = \omega_0) = R/(R+r) = A_{max}$. Osservate che, a causa della presenza della resistenza interna dell'induttore, r , e del fatto che essa comunque "dissipa" potenza, ovvero che si forma un partitore di tensione, questa funzione ha un valore massimo minore di uno, tanto più simile all'unità quanto più r è trascurabile rispetto a R .

Dato che spesso è più pratico esprimere la risposta dell'oscillatore in termini della frequenza f invece che della frequenza angolare ω (è sempre $\omega = 2\pi f$), conviene scrivere esplicitamente anche la funzione $A(f)$:

$$A(f) = \frac{2\pi f RC}{\sqrt{(2\pi f(R+r)C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}}, \quad (14)$$

dove $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ è la frequenza propria dell'oscillatore.

II. CURVA DI RISONANZA E QUALCHE SUA PROPRIETÀ

Scegliamo dei valori verosimili per le grandezze in gioco in modo da poter graficare con Python la $A(f)$, ovvero la curva di risonanza, o spettro, dell'oscillatore; prendiamo $L = 0.5$ H, $C = 0.1$ μ F, $R = 330$ ohm, $r = 40$ ohm. In queste condizioni si ha $f_0 = 712$ Hz. Naturalmente, volendo fare una sorta di simulazione del comportamento del circuito, ci disinteressiamo qui delle incertezze, o tolleranze, sui vari valori impiegati, che quindi vanno intesi come nominali.

Avendo posto dei valori numerici per le grandezze in gioco, possiamo controllare quantitativamente le approssimazioni utilizzate in precedenza. L'approssimazione di sotto-smorzamento è piuttosto ben verificata, dato che $\tau = 2L/R' = 2L/(R+r+r_G) \approx 2$ ms, per cui $1/\tau^2 \approx 2 \times 10^5$ s⁻², mentre $\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 \approx 2 \times 10^7$ (rad/s)². Inoltre possiamo anche notare che sia r_G che r sono minori di R e della impedenza complessiva del circuito a risonanza (che è ovviamente pari a R').

La Fig. 2 mostra il risultato del calcolo di $A(f)$ secondo l'Eq. 14: si osserva una bella campana, centrata su f_0 e di forma *asimmetrica*. Il picco di questa campana, che è ovviamente centrata su $f = f_0$, vale, per la scelta di valori di questo esempio, $R/(R+r) = 0.892$. Il pannello superiore della figura riporta invece lo sfasamento $\Delta\phi$ ottenuto dall'Eq. 12 (calcolando l'arctan di quella espressione): come atteso, lo sfasamento passa per zero cambiando di segno a risonanza, cioè per $f = f_0$, tende a $\pi/2$ per $f \rightarrow 0$ e a $-\pi/2$ per $f \rightarrow \infty$.

Come avrete modo di verificare svolgendo un esercizio (facoltativo), è possibile passare dalla curva di risonanza (nel dominio delle frequenze) all'andamento temporale dell'oscillatore smorzato (nel dominio del tempo) eseguendo una trasformata di Fourier numerica con il metodo FFT.

Un possibile best-fit per i dati sperimentali di $A(f)$, da acquisire in un intervallo di frequenze sufficientemente vasto (tanto più ampio quanto maggiore è il valore di R che avete scelto), può essere condotto usando la funzione di Eq. 14. I parametri da lasciare liberi nel fit dovrebbero essere, in prima battuta, quelli contenenti C , L , r , che non possono essere determinati con sufficiente accuratezza da misure indipendenti. Dunque la funzione di fit potrebbe essere del tipo $g(x) = c_1 x / (\sqrt{(c_2 x)^2 + (1 - (x/c_3)^2)^2})$, con c_{1-3} da determinare. Poiché, però, $c_1 \approx c_2$ (infatti $c_2 = c_1 + 2\pi r C$, con $rC < c_1 = 2\pi RC$), specie nel caso in cui sia stata scelta una resistenza R sufficientemente grande, il numero di parametri liberi del fit potrebbe essere ragionevolmente ridotto a due, in modo da diminuire la covarianza tra di essi e quindi aumentare l'"affidabilità" del best-fit. In alternativa, si potrebbe imporre il valore della frequenza di risonanza f_0 (ovvero il valore del parametro c_3), scegliendolo pari alla frequenza di risonanza misurata in modo diretto, per esempio dalla osservazione dello sfasamento tra V_{in} e V_{out} . Tutte queste possibilità possono

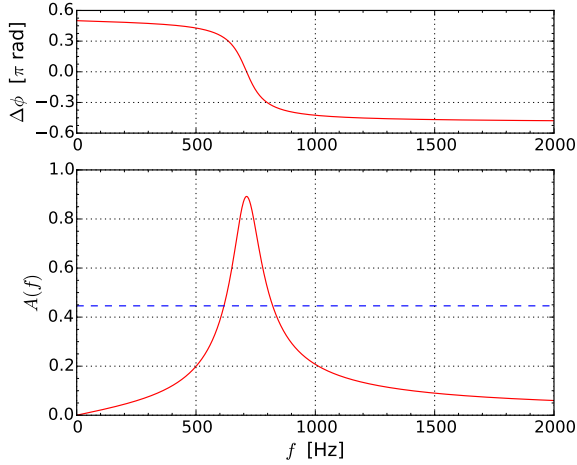


Figura 2. Curva di risonanza calcolata per l'oscillatore descritto nel testo. L'asse verticale riporta il modulo della funzione di trasferimento, $A(f)$, quello orizzontale la frequenza, f . La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore metà del massimo, $A_{max}/2$. Il pannello superiore mostra lo sfasamento $\Delta\phi$ calcolato per lo stesso oscillatore.

essere esplorate praticamente e confrontate tra loro attraverso il paragone del χ^2 ottenuto (e della covarianza), in modo da stabilire empiricamente quale funzione modello è più adatta per descrivere le osservazioni sperimentali.

Studiamo con un po' di matematica la campana ottenuta. Per caratterizzarne la larghezza Δf usiamo il cosiddetto valore fwhm (*full width at half maximum*, larghezza a metà altezza). La metà altezza $A_{max}/2$ è rappresentata nel grafico dalla linea tratteggiata: possiamo individuare due frequenze, che chiameremo f_{\mp} , che si trovano rispettivamente “a sinistra” e “a destra” di f_0 , per le quali si ha $A(f = f_{\mp}) = A_{max}/2$. Queste frequenze sono dunque quelle a cui il modulo della funzione di trasferimento vale la metà del valore massimo. Dal punto di vista *sperimentale*, tali valori possono essere individuati in maniera piuttosto immediata variando la frequenza del generatore e osservando all'oscilloscopio quando l'ampiezza di V_{out} è la metà di quella di $V_{out,max}$.

Nel fare le misure sul circuito occorre naturalmente tenere conto del fatto che l'ampiezza di V_{in} non rimane costante in tutto l'intervallo di frequenza considerato. Infatti, a risonanza la caduta di potenziale attraverso r_G è non necessariamente trascurabile. Essa può essere determinata considerando che, a risonanza, cioè nelle condizioni che implicano una caduta di potenziale più marcata, l'impedenza complessiva della maglia vale R' . Applicando la regola dei partitori di tensione alla serie costituita da r_G e da “tutto il resto”, si ha, per i valori considerati in questo esempio, $|V_{win}| = ((R+r)/R')|V_{wG}| \simeq 0.88|V_{wG}|$. Dunque il generatore di forme d'onda si comporta, in questo caso, in modo non molto ideale. Infine, sono noti i problemi di termalizzazione che affliggono gli strumenti disponibili in laboratorio, che rendono instabile (general-

mente decrescente) l'ampiezza del segnale in uscita con il passare del tempo, almeno per il primo periodo di funzionamento a freddo. Di conseguenza V_{in} deve essere continuamente monitorata.

In ogni caso, individuate in modo opportuno le frequenze f_- e f_+ , si ha semplicemente $\Delta f_{fwhm} = f_+ - f_-$, che rappresenta un'ottima descrizione (convenzionale) della larghezza della campana. Naturalmente se volessimo esprimere la larghezza fwhm in termini di frequenza angolare avremmo $\Delta\omega_{fwhm} = 2\pi\Delta f_{fwhm}$. Notiamo che sono in uso comune anche altre definizioni per la larghezza di una campana di risonanza. Per esempio spesso si impiega la definizione Δf_{-3dB} , che rappresenta la distanza tra le frequenze in cui V_{out} è $1/\sqrt{2}$ volte il valore massimo $V_{out,max}$, ovvero la distanza tra le frequenze a cui l'attenuazione, o guadagno, $A(f)$ del circuito è -3 dB (ricordate la definizione di attenuazione in dB). Il motivo di questa possibile scelta vi sarà chiaro nel seguito; per il momento limitiamoci a notare che, con un po' di algebra si trova facilmente $\Delta f_{-3dB} \propto \Delta f_{fwhm}$, dove il fattore di proporzionalità, che potete provare a determinare sulla falsariga di quanto verrà esposto tra breve, vale $1/\sqrt{3}$.

Torniamo dunque ad esaminare la larghezza Δf_{fwhm} e facciamo due conticini per vedere dove cadono i valori di f_{\mp} . Si deve risolvere l'equazione algebrica

$$\frac{2\pi f_{\mp} RC}{\sqrt{(2\pi f_{\mp} (R+r)C)^2 + (1 - (f_{\mp}/f_0)^2)^2}} = \frac{1}{2} \frac{R}{R+r}. \quad (15)$$

Facendo il quadrato dei due membri e rimaneggiando si ottiene la seguente equazione:

$$4(2\pi f_{\mp} (R+r)C)^2 = (2\pi f_{\mp} (R+r)C)^2 + (1 - (f_{\mp}/f_0)^2)^2. \quad (16)$$

Poniamo ora $\alpha = (\sqrt{3})2\pi(R+r)C$ e $f_{\mp}^2 = x$. L'espressione precedente può essere riscritta nella forma di un'equazione algebrica di secondo grado per x :

$$x^2 - x(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4) + f_0^4 = 0. \quad (17)$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4) \pm \sqrt{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)^2 - 4f_0^4}}{2} = (18) \\ &= \frac{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)}{2} \pm \alpha f_0^3 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 f_0^2}{4}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Notiamo che, per la nostra scelta dei componenti, si ha $\alpha \simeq 5 \times 10^{-4}$ s, mentre $f_0 = 712$ Hz. Pertanto la radice quadrata può essere approssimata con l'unità. A questo punto possiamo definire la larghezza (fwhm) della variabile ausiliaria x come $\Delta x_{fwhm} = x_1 - x_2 \approx 2\alpha f_0^3$. Per come questa variabile è stata definita, si ha $\Delta x_{fwhm} \approx 2f_0 \Delta f_{fwhm}$. Si trova quindi

$$\Delta f_{fwhm} \approx \alpha f_0^2 = 2\pi\sqrt{3}(R+r)C f_0^2. \quad (20)$$

Questa è la prima “proprietà” rilevante della curva di risonanza. Per la curva di risonanza graficata in Fig. 2 si

ottiene $\Delta f_{fwhm} = 204$ Hz. Naturalmente questa è anche la larghezza che esce da un'analisi del grafico di Fig. 2, in particolare dalla valutazione della distanza fra le intercette della curva di risonanza con la linea tratteggiata $A_{max}/2$.

Poiché, ricordiamo, $f_0^2 = 1/(2\pi\sqrt{LC})^2$, si ottiene anche

$$\Delta f_{fwhm} \approx \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{R+r}{L}; \quad (21)$$

essendo il coefficiente di smorzamento del nostro oscillatore proporzionale al rapporto tra resistenza e induttanza, si verifica quello che già, probabilmente, sapeva dalla meccanica, cioè che *la larghezza della campana di risonanza è proporzionale all'entità dello smorzamento*. In particolare, essa è *inversamente proporzionale* (le dimensioni devono tornare) al tempo di smorzamento $\tau = 2L/R' \simeq 2L/(R+r)$ (supponendo r_C trascurabile rispetto a $R+r$).

C'è poi un'ulteriore "proprietà" rilevante. Si vede facilmente come si abbia $x_1 x_2 = f_0^4$, che conduce a

$$f_+ f_- = f_0^2. \quad (22)$$

Deve sempre verificarsi che il prodotto tra i valori di frequenza ai quali la curva vale un mezzo del valore massimo sia pari al quadrato della frequenza di risonanza. Tutte e due queste "proprietà" sono facilmente verificabili, entro le incertezze sperimentali, nell'esperienza pratica.

Infine osservate che l'asimmetria della campana è tanto minore quanto più il termine $(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)$ che compare in Eq. 18 è trascurabile rispetto a $\sqrt{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)^2 - 4f_0^4}$. Si vede abbastanza facilmente che questo si verifica, e quindi la campana tende a essere simmetrica, quando lo smorzamento è piccolo. Per trovare una relazione matematica che tenga in debito conto delle dimensioni, questo significa che *la campana tende a essere simmetrica per $\alpha f_0 \ll 1$* .

Da ultimo, la Fig. 3 riporta diverse curve di risonanza e i corrispondenti sfasamenti in funzione della frequenza per alcuni diversi valori dei componenti R e C ; si vede come, a parità di L , la frequenza di risonanza sia determinata da C e la larghezza della campana da R .

A. Una visione alternativa

Come succede molto spesso, è possibile giungere qualitativamente alla conclusione che il circuito mostrato in Fig. 1 in modo molto più diretto di quanto consentito dall'applicazione del metodo simbolico. Partiamo dalla considerazione che il segnale V_{out} è rappresentativo della intensità di corrente che circola nella maglia dell'oscillatore. A basse frequenze, tendenti alle condizioni continue ($\omega \simeq 0$), la corrente è "bloccata", o fortemente impedita, dalla presenza del condensatore. Ad alte frequenze, invece, è l'induttore che "reagisce" (per "inerzia") al passaggio di corrente, cercando di impedirlo. Infine, a risonanza,

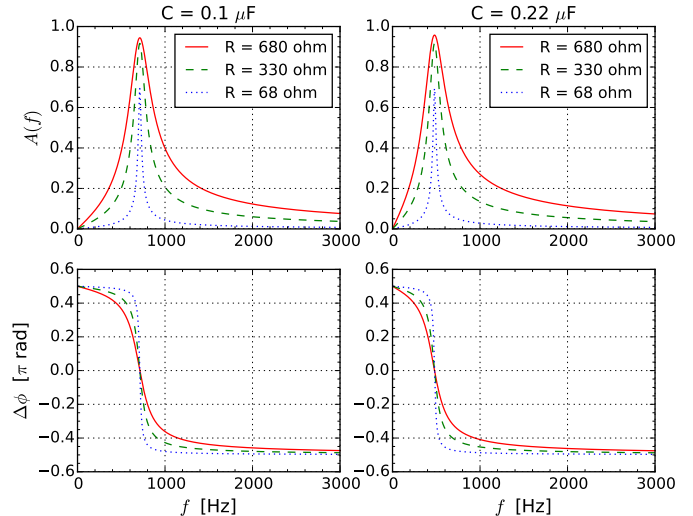


Figura 3. Diverse curve di risonanza e sfasamenti corrispondenti calcolati per diverse scelte di R e C (si suppone $L = 0.5$ H e $r = 40$ ohm per tutte le curve).

come abbiamo già discusso, la serie di condensatore e induttore presenta il minimo di impedenza, che significa la corrente viene massimizzata, ovvero l'ampiezza del segnale V_{out} va al suo picco.

Questo tipo di descrizione può stimolare un approccio, sempre qualitativo, che fa uso dei concetti tipici della descrizione dei filtri. Sappiamo che un filtro, caratterizzato da una data risposta in frequenza, e quindi da una certa funzione di trasferimento, può essere realizzato impiegando resistenze e condensatori. Il comportamento del condensatore (della sua impedenza) con la frequenza è responsabile per la specifica risposta del filtro: usando un solo condensatore e una sola resistenza, a seconda della topologia circuitale, si può ottenere un filtro passa-basso o passa-alto.

È molto semplice dimostrare che anche unendo un induttore e una resistenza in una maglia si può ottenere un filtro. Poiché il comportamento dell'induttore con la frequenza è "opposto" a quello del condensatore (il condensatore tende a comportarsi da circuito aperto o da cortocircuito a frequenze rispettivamente basse o alte, l'induttore tende a comportarsi in modo opposto), è altrettanto facile rendersi conto che la topologia di un filtro passa-alto RL è la stessa di un passa-basso RC con l'induttore al posto del condensatore, quella di un filtro passa-basso RL è la stessa di un passa-alto RC con l'induttore al posto del condensatore.

Nel circuito di Fig. 1 il condensatore è in serie all'induttore e inoltre è presente una resistenza verso la linea di terra, o massa. Con un po' di forzatura concettuale, quel circuito può essere pensato come la sequenza di un filtro passa-alto (in cui l'elemento che reagisce alla frequenza è il condensatore) e di un filtro passa-basso (in cui invece è protagonista l'induttore). La serie dei due filtri

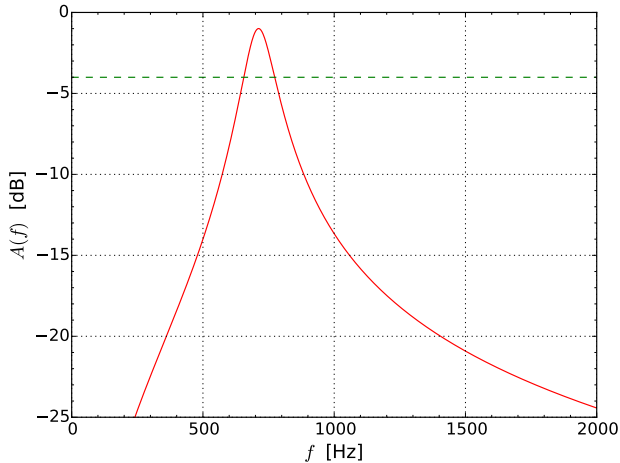


Figura 4. Analogo del pannello inferiore di Fig. 2, ma con l'attenuazione, o guadagno, $A(f)$ misurata in dB, come si fa nel diagramma di Bode dei filtri. La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore che si trova a -3 dB rispetto al valore massimo. Si può facilmente dimostrare che la larghezza della campana così determinata, cioè l'intervallo in frequenza tra le due intercette della linea con la campana, è $\Delta f_{-3dB} = \Delta f_{fwhm}/\sqrt{3}$.

dà luogo a un filtro *passa-banda*, che lascia passare, cioè non attenua (o attenua di poco) le frequenze comprese all'interno di un certo range, che in pratica corrisponde alla larghezza della campana della curva di risonanza.

In linea di principio, un filtro passa-banda potrebbe anche essere costruito usando solo resistenze e condensatori (o, se si vuole, resistenze e induttori). Tuttavia la variante *RLC* è sicuramente preferibile: (i) essa minimizza i problemi connessi con il montaggio in serie di due distinti circuiti, e la conseguente necessità di aggiustare l'impedenza di uscita del primo sotto-circuito con quella di ingresso del sotto-circuito seguente; (ii) a patto di usare valori di resistenza sufficientemente bassi, essa permette di ottenere bande relativamente strette; (iii) il comportamento con la frequenza di un oscillatore forzato *RLC* permette di ottenere curve di attenuazione, o guadagno, che sono generalmente più "ripide" di quelle realizzate per filtri "a un polo".

Per curiosità, la Fig. 4 mostra la curva di risonanza (parametri come in Fig. 2) con il modulo della funzione di trasferimento, $A(f)$, misurato in unità di dB, come si fa quando si preparano i grafici di Bode dei filtri. Si vede chiaramente come, almeno in alcuni tratti, la pendenza della curva (in valore assoluto) sia ben maggiore dei 3 dB/ottava (o 20 dB/decade) tipici dei filtri "a un polo". Inoltre, come già affermato, diminuendo la resistenza della maglia potrebbero facilmente essere ottenute pendenze ancora più marcate.

III. ENERGIA, POTENZA E FATTORE DI QUALITÀ (Q-FACTOR)

L'aspetto più trasversale del fenomeno della risonanza nelle sue molteplici applicazioni riguarda il comportamento del sistema, che per noi è un oscillatore *RLC*, nei confronti della potenza. Infatti si afferma spesso che a risonanza si ottiene il massimo trasferimento di potenza dalla forzante, che per noi è il generatore di forme d'onda, al sistema. Scopo di questa sezione è cercare una descrizione quantitativa di questo fenomeno soffermandoci su diversi aspetti che riguardano energia, potenza media, e fattore di qualità dell'oscillatore.

Come sappiamo dallo studio dell'oscillatore smorzato *RLC*, nella descrizione di un circuito in cui induttore e condensatore si trovano in serie fra loro è possibile individuare due tipologie, ovvero due espressioni, per l'energia. Essa, infatti, può avere sede sia nel condensatore, e quindi avere un carattere elettrostatico, che nell'induttore, e quindi avere un carattere magnetostatico: sappiamo anche che tutto ciò funziona in analogia con l'oscillatore meccanico, dove l'energia può essere espressa come elastica e cinetica. Anche nell'oscillatore *RLC* l'energia passa continuamente e periodicamente da elettrostatica a magnetostatica, così come nell'oscillatore meccanico essa passa continuamente e periodicamente da elastica a cinetica (per chi conosce il concetto, c'è un vettore di Poynting che punta da induttore a condensatore, e viceversa, in modo oscillante nel tempo).

Nel funzionamento dell'oscillatore si ripetono periodicamente degli istanti di tempo in cui la carica sul condensatore è nulla e la corrente che circola nella maglia è massima (al valore I_{max}), cioè in cui l'energia è espressa solo dal termine magnetostatico. L'espressione di questa energia, che quindi rappresenta *tutta* l'energia immagazzinata nell'oscillatore, è

$$E_{\text{stored}} = \frac{L}{2} I_{\text{max}}^2. \quad (23)$$

Ora è facile rendersi conto che $I_{\text{max}}^2 \propto |V_{\omega out}|^2$: infatti fare il quadrato dell'ampiezza della corrente massima equivale a considerare il modulo quadro del fasore I_{ω} corrispondente, che è sicuramente proporzionale, attraverso l'inverso del modulo dell'impedenza di uscita del circuito, $|Z_{out}|$, a $V_{\omega out}$. Ora, supponendo di trovarci in condizioni in cui $|V_{\omega in}|$ rimane costante mentre viene variata la frequenza e costruita la curva, o spettro, di risonanza, risulta evidente che

$$E_{\text{stored}}(f) \propto A^2(f), \quad (24)$$

dove rinunciamo a esplicitare il coefficiente di proporzionalità, che qui non ci interessa.

Dunque, poiché l'andamento dell'energia immagazzinata nell'oscillatore dipende da $A^2(f)$, spesso è utile avere una rappresentazione grafica proprio di questa funzione, a cui possiamo dare il nome di *curva di risonanza*, o *spettro, di energia*. In Fig. 5, ad esempio, il calcolo di

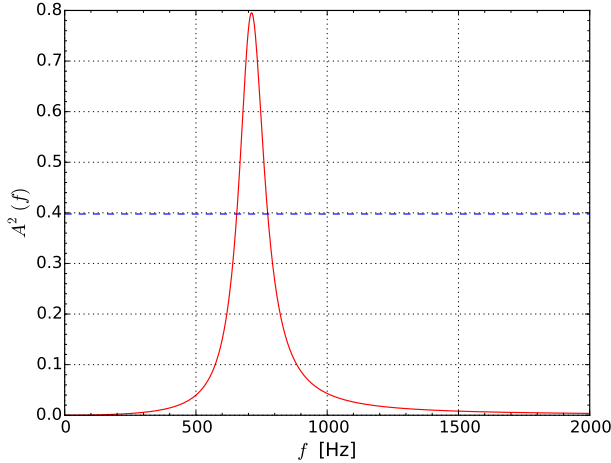


Figura 5. Calcolo della curva di risonanza, o spettro, di energia $A^2(f)$ per lo stesso oscillatore armonico RLC considerato in Fig. 2. La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore $A_{max}^2/2$. Si può facilmente dimostrare che la larghezza a metà altezza della campana così determinata, cioè l'intervallo in frequenza tra le due intercette della linea con la campana, è $\Delta f_{fwhm,A^2} = \Delta f_{-3dB}$.

$A^2(f)$ è eseguito per la stessa scelta di valori di Fig. 2. Si vede come, per effetto del quadrato, la campana sia più stretta e più simmetrica rispetto a quella di Fig. 2. Inoltre, come è facile dimostrare, la sua larghezza a metà altezza è $\Delta f_{fwhm,A^2} = \Delta f_{-3dB}$, che dà ragione del perché sia comune definire e impiegare anche la larghezza Δf_{-3dB} per caratterizzare una curva di risonanza.

Concediamoci un'altra piccola divagazione matematica sulla $A^2(f)$. Troverete in futuro, se già non è successo, che alcuni spettri, o curve di risonanza, hanno una forma ben descritta da una funzione Lorentziana, cioè del tipo

$$h(x) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2 + (x - x_0)^2}, \quad (25)$$

con κ_1 e κ_2 costanti e x variabile indipendente generica. Questa funzione rappresenta una campana *simmetrica*, centrata in $x = x_0$, con altezza di picco $h_{max} = \kappa_1/\kappa_2$ e larghezza a metà altezza $\Delta f_{fwhm} = 2\sqrt{\kappa_2}$. Confrontata con una Gaussiana di simile larghezza, la Lorentziana ha l'importante caratteristica di avere delle code "più alte".

Si può dimostrare che, nel caso di oscillatore RLC molto poco smorzato, la $A^2(f)$ tende a questa forma funzionale. Scriviamo infatti esplicitamente la $A^2(f)$, cioè svolgiamo il quadrato dell'Eq. 14:

$$A^2(f) = \frac{(2\pi fRC)^2}{(2\pi f(R+r)C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2} \simeq (26)$$

$$\simeq \frac{(2\pi fRC)^2}{(2\pi fRC)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}, \quad (27)$$

dove l'ultimo passaggio vale per $r \ll R$, che supponiamo valida per semplicità matematica. Con alcuni, ulteriori e

semplicissimi, passaggi, si ha

$$A^2(f) \simeq \frac{1}{1 + \frac{(f_0^2 - f^2)^2}{(2\pi fRC)^2 f_0^4}} = \quad (28)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{((f_0 - f)(f_0 + f))^2}{(2\pi fRC)^2 f_0^4}}. \quad (29)$$

Se l'oscillatore è molto poco smorzato, allora la larghezza della campana $A^2(f)$ sarà molto stretta, cioè la funzione sarà sensibilmente diversa da zero solo in un piccolo intorno di $f = f_0$. A parte che nel termine $(f - f_0)$, in cui conta (al primo ordine) la differenza tra f e f_0 , altrove potremo porre $f \simeq f_0$, ottenendo

$$A^2(f) \simeq \frac{1}{1 + 4 \frac{(f_0 - f)^2}{f_0^4} \frac{1}{(2\pi RC)^2}}. \quad (30)$$

Questa è proprio l'espressione di una Lorentziana centrata in $f = f_0$, cioè sulla risonanza, e di larghezza a metà altezza $\Delta f_{fwhm,A^2} = 2\pi RC f_0^2 = R/(2\pi L)$, dove abbiamo usato $f_0^2 = 1/(4\pi^2 LC)$. Ricordando che per il nostro oscillatore armonico il tempo di smorzamento è $\tau = 2L/R$, la larghezza a metà altezza si può scrivere come $\Delta f_{fwhm,A^2} = 1/(\pi\tau)$, ovvero, tornando a ragionare in termini di frequenza angolare, $\Delta\omega_{fwhm,A^2} = 2/\tau$.

Al di là dei dettagli matematici, che non contano molto, il messaggio di questa divagazione può essere riassunto così: per un oscillatore molto poco smorzato, cioè per il quale $1/\tau \ll \omega_0$, la curva di risonanza di energia tende ad assumere la forma Lorentziana, con una semilarghezza a metà altezza (misurata in unità di frequenza angolare) pari a $1/\tau$. Per esempio, questo è il caso del cosiddetto "modello di Lorentz" dell'interazione radiazione/materia in approccio classico, ma anche l'andamento di una popolazione di sistemi (per esempio atomi) eccitati, la cui eccitazione viene smorzata attraverso collisioni (questo esempio può anche essere messo in relazione con la "distribuzione di Cauchy" da voi già studiata in precedenza).

Ragioniamo ora in termini di potenza. Sappiamo che, in un circuito sottoposto a una d.d.p. alternata (sinusoidale) $\Delta V(t)$ e attraversato da una corrente alternata (sinusoidale) di intensità $I(t)$, la potenza *media* può essere espressa come $\langle P \rangle = (\Delta V_{max} I_{max}/2) \cos(\Delta\phi)$, dove ΔV_{max} e I_{max} rappresentano le ampiezze (qui considerate reali) dei segnali $\Delta V(t)$ e $I(t)$, ovvero i *moduli* dei corrispondenti fasori, e $\Delta\phi$ lo sfasamento dell'uno rispetto all'altro. Come certamente ricordate, sia il fattore $1/2$ che il *fattore di potenza* $\cos(\Delta\phi)$ vengono dall'operazione di media temporale.

Se consideriamo la potenza erogata dal generatore di forme d'onda che alimenta il circuito RLC , possiamo individuare $\Delta V(t)$ con il segnale $V_{in}(t)$ [o, se preferite, con $V_G(t)$] e $I(t)$ con la corrente che scorre nella maglia dell'oscillatore. Sulla falsariga di quanto esposto per il calcolo dell'energia immagazzinata nell'oscillatore, possiamo facilmente dedurre che $\langle P(f) \rangle \propto A^2(f) \cos(\Delta\phi)$. Visto

l'andamento di $\Delta\phi$ con la frequenza f , è immediato affermare che questa funzione è ancora una campana centrata in $f = f_0$. Se interpretiamo $\langle P(f) \rangle$ come potenza trasferita dalla forzante al sistema, è evidente che essa ha un picco proprio a risonanza, dove lo sfasamento è nullo.

A risonanza, nell'oscillatore l'energia rimbalza continuamente e periodicamente tra condensatore (energia elettrostatica) e induttore (energia magnetostatica). La presenza delle resistenze, che questa volta consideriamo in blocco come $R' = R + r + r_G$, implica dissipazione di potenza per effetto Joule. La potenza *media* dissipata per effetto Joule è

$$\langle P_{Joule} \rangle = \frac{R' I_{max}^2}{2}. \quad (31)$$

A risonanza, questa potenza, che l'oscillatore perde (cioè "dissipa" mediamente nel tempo) viene mediamente ripianata dalla potenza erogata dal generatore, trasferita continuamente al sistema.

Come già fatto nello studio dell'oscillatore smorzato RLC , possiamo a questo punto introdurre una grandezza che misura l'energia persa per ciclo:

$$E_{lostpercycle} = \langle P_{Joule} \rangle T_0 = \frac{R' I_{max}^2}{2 f_0}, \quad (32)$$

dove $T_0 = 1/f_0$ rappresenta il periodo dell'oscillazione a risonanza. Combinando energia immagazzinata e energia persa nel ciclo, possiamo scrivere il *fattore di qualità* come

$$Qf = 2\pi \frac{E_{stored}}{E_{lostpercycle}}, \quad (33)$$

da cui

$$Qf = 2\pi \frac{LI_{max}^2/2}{R'I_{max}^2/2} f_0 = 2\pi \frac{L}{R'} f_0. \quad (34)$$

È facile notare allora che è dimostrata la relazione $Qf \propto f_0/\Delta f_{fwhm}$ (qui supponiamo r_G trascurabile); il fattore di proporzionalità, che vale $\sqrt{3}$, cioè $Qf = \sqrt{3}f_0/\Delta f_{fwhm}$, è legato alla definizione di larghezza a metà altezza (vedi Eq. 21). In particolare, esso scomparirebbe se usassimo la larghezza Δf_{-3dB} che abbiamo definito prima.

Di conseguenza, l'analisi della curva di risonanza, in particolare di quella per l'energia, conduce in maniera pressoché immediata alla determinazione di Qf per un oscillatore armonico.

Per concludere questa sezione, facciamo due conticini: per l'oscillatore costruito con i componenti citati nel nostro esempio si ha $Qf \approx 6$, un valore molto inferiore a quello che si ottiene sopprimendo la resistenza R , come nell'esperienza con l'oscillatore smorzato.

IV. CIRCUITO "ANTIRISONANTE"

Come potete facilmente capire, i circuiti con resistori, induttori, capacitori sono un ottimo banco di prova per

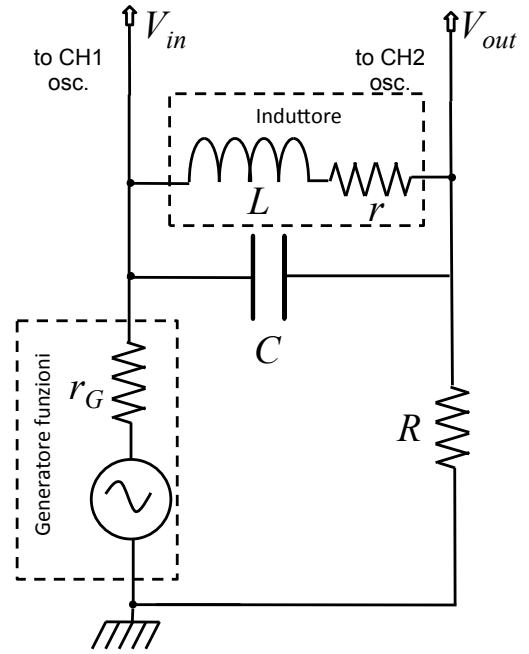


Figura 6. Circuito dell'oscillatore "antirisonante" (parallelo) considerato nel testo.

verificare, studiare, analizzare le condizioni di risonanza. A differenza degli analoghi meccanici, qui si può godere di un'ampia libertà nel definire le condizioni di operazione del circuito (sempre a patto che le approssimazioni considerate si mantengano valide).

Un esempio della versatilità ed efficacia dei circuiti di questo tipo è rappresentato dallo schema di Fig. 6, che rappresenta quello che talvolta si chiama *oscillatore antirisonante*. La denominazione intende mettere in luce che, in tale circuito, a risonanza l'ampiezza di V_{out} diminuisce, cioè ha un picco orientato "verso il basso" laddove prima questo era orientato "verso l'alto".

Esaminiamo brevemente anche questo circuito. La differenza fondamentale rispetto al precedente è che stavolta induttore e condensatore sono in parallelo fra loro. L'impedenza di questo parallelo è

$$Z_{par} = \frac{r + j\omega L}{j\omega r C + (1 - \omega^2 LC)}. \quad (35)$$

La soluzione completa, cioè senza approssimazioni, dell'equazione del circuito è in questo caso parecchio complicata: essa è trattata numericamente in Appendice. Per proseguire con un po' di matematica semplice, occorre imporre che *sia trascurabile la resistenza interna dell'induttore rispetto a ωL* , cioè $r \ll \omega L$. Tenendo conto dei valori in gioco, questa approssimazione è attesa valere abbastanza bene solo per frequenze sufficientemente alte.

Nell'approssimazione fatta, e assumendo per semplicità anche r_G trascurabile, per cui $V_{\omega G} = V_{win}$, si ottiene abbastanza rapidamente la seguente funzione di

trasferimento:

$$T(\omega) = \frac{V_{\omega out}}{V_{\omega in}} = \frac{j\omega rC + (1 - (\omega/\omega_0)^2)}{j\omega(L/R + rC) + (1 - (\omega/\omega_0)^2)^2}, \quad (36)$$

con, come al solito, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. In questo circuito la risonanza implica che l'impedenza del parallelo tenda a un massimo; di conseguenza a risonanza diminuisce la corrente che passa nel circuito e quindi V_{out} ha un minimo.

Infatti il modulo della funzione di trasferimento, scritto anche stavolta in funzione di $f = \omega/(2\pi)$, è

$$A(f) = |T(f)| = \sqrt{\frac{(2\pi f rC)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}{(2\pi f(rC + L/R))^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}}. \quad (37)$$

Questa funzione è decisamente meno comprensibile di quella espressa in Eq. 14, però ci si rende conto abbastanza facilmente che essa presenta un *minimo* per $f = f_0$. La Fig. 7 mostra un grafico della funzione $A(f)$ per valori dei componenti analoghi a quelli usati in precedenza. Si tralasciano le verifiche matematiche, ma si può osservare come anche in questo caso si ottenga che a risonanza lo sfasamento passi per zero e cambi di segno. Inoltre anche qui la larghezza della campana dipende dal coefficiente di smorzamento (ma, attenzione, la dipendenza con il coefficiente di smorzamento è opposta rispetto a prima, cioè diminuisce con R' , l'espressione di $\Delta f_{f_{whm}}$ è diversa e la larghezza della campana è in genere ben maggiore, come si vede anche dal grafico), e valgono alcune “proprietà” simili a quelle trovate prima per l'oscillatore risonante. In particolare si ha ancora $f_- f_+ = f_0^2$. Notate che l'andamento “spigoloso” e il quasi annullamento della funzione per $f \approx f_0$ possono essere, almeno in parte, conseguenza delle approssimazioni fatte.

APPENDICE: CALCOLO DI $A(f)$ PER L'OSCILLATORE ANTI-RISONANTE CON IL PACCHETTO CMATH

Come sappiamo, Python dispone di un pacchetto, denominato `cmath`, che consente di manipolare numeri complessi. Adoperare i numeri complessi può tornare utile quando la funzione $T(f)$ diventa complicata, come nel caso del circuito antirisonante. Infatti, almeno in linea di principio, non c'è bisogno di agire con razionalizzazioni, semplificazioni e altri artifici matematici per ottenere (sulla carta) una funzione $A(f)$ che possa essere direttamente calcolata con Python.

Scriviamo l'impedenza totale del circuito come

$$Z_{tot} = r_G + R + Z_{par}, \quad (38)$$

con

$$Z_{par} = \left(\frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C \right)^{-1}, \quad (39)$$

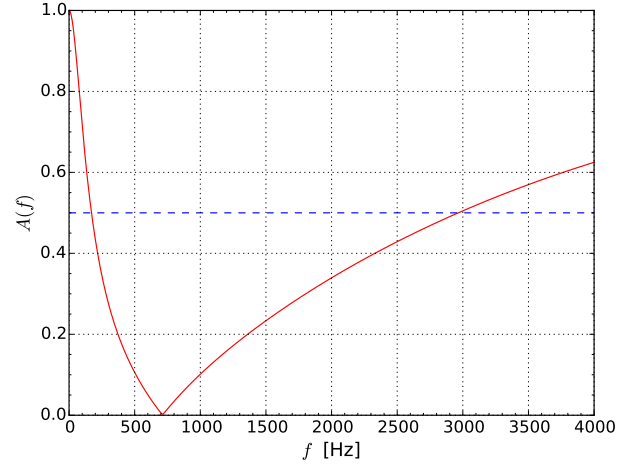


Figura 7. Curva di “antirisonanza” calcolata per l'oscillatore (parallelo) descritto nel testo. L'asse verticale riporta il modulo della funzione di trasferimento, $A(f)$, quello orizzontale la frequenza, f . La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore metà del massimo, $A_{max}/2$.

impedenza del parallelo induttore reale e condensatore, scritta in forma complessa. Questa espressione è ovviamente analoga a quella di Eq. 35, ma, coerentemente con l'approccio che stiamo seguendo, in essa non sono stati inseriti passaggi matematici di alcun genere.

Il segnale di uscita, ovvero il fasore $V_{\omega out}$, è preso ai capi del resistore R , mentre il segnale di ingresso, $V_{\omega in}$, è preso ai capi della serie costituita dal resistore R , con impedenza R , e dal parallelo tra induttore (reale) e condensatore, con impedenza Z_{par} . Possiamo quindi porre

$$Z_{out} = R \quad (40)$$

$$Z_{in} = R + Z_{par}. \quad (41)$$

La funzione di trasferimento può essere convenientemente espressa in funzione delle impedenze appena definite. Infatti, dato che $V_{\omega out} = Z_{out}I_{\omega}$ e $V_{\omega in} = Z_{in}I_{\omega}$, si può scrivere

$$T(\omega) = \frac{Z_{out}}{Z_{in}}. \quad (42)$$

Usando Python, è facile costruire arrays di Z_{out} e Z_{in} in funzione della frequenza f ed è immediato calcolarne i moduli. Dividendo questi moduli si ottiene sotto forma di array la funzione di trasferimento $A(f)$, mentre calcolando il rapporto tra parte immaginaria e reale si ha lo sfasamento (che quindi è anch'esso semplice da calcolare).

Il risultato del calcolo, sia per $A(f)$ che per $\Delta\phi$, è mostrato in Fig. 8: i valori dei componenti del circuito sono quelli già impiegati in precedenza, cioè $R = 330$ ohm, $r = 40$ ohm, $r_G = 50$ ohm, $L = 0.5$ H, $C = 0.1$ μ F. Si vede che effettivamente lo sfasamento passa per lo zero,

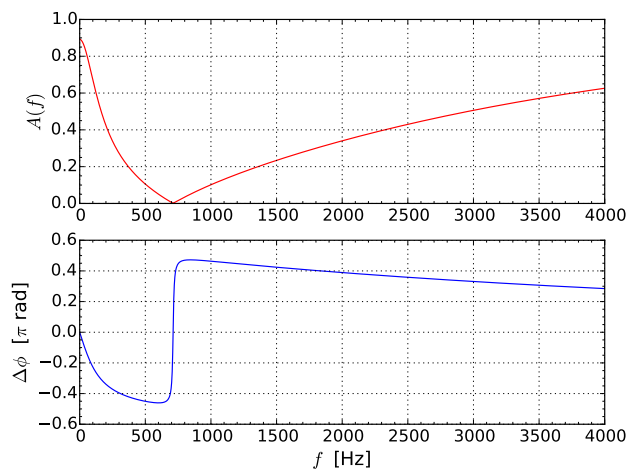


Figura 8. Attenuazione, o guadagno, $A(f)$ e sfasamento $\Delta\phi$ in funzione della frequenza per il circuito antirisonante di Fig. 6, calcolate per i valori dei componenti citati nel testo. Il calcolo è eseguito usando direttamente le espressioni complesse delle impedenze in gioco, grazie all'impiego del pacchetto `cmath` di Python.

cambiando di segno, a risonanza. Per quanto riguarda l'attenuazione, o guadagno, l'andamento è simile a quello approssimato di Fig. 7, con un po' meno spigolosità a basse frequenze, a testimonianza che le approssimazioni introdotte per ricavare l'Eq. 37 sono ragionevoli.