Misure rms con multimetro

francesco.fuso@unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 3 - FF, 11 novembre 2015)

Queste poche righe intendono richiamare alcuni concetti relativi alle grandezze periodiche alternate e fornire un'interpretazione (thanks, Diego) del comportamento che un multimetro ha nella lettura di valori rms per grandezze alternate. Questa seconda parte riguarda un argomento abbastanza "raffinato", probabilmente di interesse non generale, ma comunque utile per capire il perché di quanto osservato.

I. POTENZA MEDIA E VALORI RMS

L'introduzione dei valori di ampiezza rms (valori *efficaci*) per segnali alternati ha una chiara motivazione pratica. Supponiamo infatti di avere un elemento circuitale in cui scorre una corrente di intensità $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_1)$ e ai cui capi si misura una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \cos(\omega + \phi_2)$. In altre parole, sia d.d.p. che corrente hanno un *andamento sinusoidale*, evidentemente con media temporale nulla (grandezze *alternate*). Senza perdere di generalità, si può sempre immaginare di traslare l'origine dei tempi in modo tale che $\phi_1 = 0$, per cui si avrà $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ e $V(t) = V_0 \cos(\omega + \Delta\phi)$, con $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ (*sfasamento*).

La potenza "istantanea" che "interessa" (è "dissipata" nel) l'elemento circuitale, ovvero quella, segno a parte, erogata dal generatore a cui l'elemento è collegato, si scrive

$$P(t) = I(t)V(t) = I_0V_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t + \Delta\phi) = \quad (1)$$
$$= I_0V_0 \cos(\omega t)(\cos(\omega t)\cos(\Delta\phi) - \sin(\omega t)\sin(\Delta\phi)) \quad (2)$$

dove abbiamo usato una nota relazione trigonometrica. Questa potenza oscilla periodicamente tra zero e il valore massimo I_0V_0.

Dal punto di vista pratico, allo scopo di quantificare l'effettiva dissipazione di potenza da parte dell'elemento circuitale (o "utilizzatore") occorre determinare il valore *medio nel tempo* (d'ora in avanti solo *medio*) di $P(t)$. Trattandosi di una funzione periodica, la media si può fare integrando su un periodo T, cioè:

$$< P >= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} P(t)dt \; . \quad (3)$$

Nell'integrazione della funzione di Eq. 1 i termini dispari, quelli del tipo $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$, si annullano, poiché si tratta di funzioni a media nulla; rimangono da integrare solo i termini del tipo $\cos^2(\omega t)$. Si ottiene facilmente (al secondo anno di Università dovete saper fare questi integrali!) che, *per funzioni sinusoidali*:

$$< P >= \frac{I_0V_0}{2}\cos(\Delta\phi) \quad (4)$$

.

L'origine fisica dell'eventuale termine *di sfasamento* $\Delta\phi$ vi sarà chiara andando più avanti nel corso. Nel caso, molto comune, che il componente considerato sia resistivo, cioè ohmico (una lampadina, per esempio), non c'è sfasamento tra corrente e tensione (si dice che il *fattore di potenza* $\cos(\Delta\phi)$ vale uno), per cui $< P >= I_0V_0/2 = V_0^2/(2R) = RI_0^2/2$, dove per le ultime due uguaglianze si è usata la legge di Ohm.

Il valore rms di una grandezza periodica alternata $f(t)$, di periodo T, è definito come:

$$f_{rms} \equiv \sqrt{< f^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt} \; . \quad (5)$$

A. Forme d'onda sinusoidali

Sulla base di quanto stabilito, una forma d'onda sinusoidale per un "segnale" di tensione si può scrivere come $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, con V_0 *ampiezza* e ω frequenza angolare (o pulsazione) del segnale. Nell'espressione ho omesso il termine di "fase costante", supponendo di poter traslare l'origine dei tempi a piacere in modo da ottenere una dipendenza dal tempo di tipo coseno. Questo non fa perdere generalità, come potete facilmente verificare, ma semplifica di parecchio la matematica.

Supponiamo allora di avere una *forma d'onda sinusoidale*, cioè una funzione $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$, è immediato verificare che si ha

$$f_{rms} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \text{ onda sinusoidale ,} \quad (6)$$

Piccola osservazione pratica: f_0 rappresenta l'ampiezza e *non l'ampiezza picco-picco* f_{pp} della forma d'onda considerata! L'ampiezza picco-picco, cioè la distanza fra minimi e massimi di ampiezza, vale infatti $f_{pp} = 2f_0$. Nel caso della corrente di rete (quella fornita dall'ENEL), si sa che $V_{rms} = 230 - 240$ V. Provate a calcolare la corrispondente V_{pp}: troverete valori molto alti (oltre 500 V), che dovrebbero indurvi a porre particolare attenzione quando maneggiate apparecchi elettrici!

Sulla base di quanto dimostrato in precedenza, nel caso sinusoidale e con carichi resistivi si ha immediatamente

$$< P >= V_{rms}I_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R} = RI_{rms}^2 \; , \quad (7)$$

cioè otteniamo le stesse relazioni formali che valgono in corrente continua, a patto di considerare al posto delle

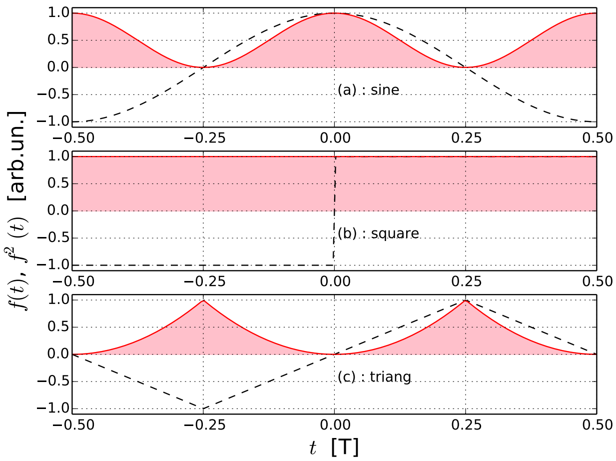

Figura 1. Grafici delle funzioni considerate nel testo per il caso di onda sinusoidale (a), onda quadra (b), onda triangolare (c). L'asse orizzontale copre un singolo periodo di oscillazione. Le curve tratteggiate nere sono le funzioni che rappresentano le forme d'onda, quelle rosse continue sono i quadrati (moduli quadri) e la superficie riempita in rosa rappresenta l'area sottesa a queste ultime curve. La figura è *ovviamente* fatta con Python.

ampiezze V_0 e I_0 i valori rms V_{rms}, I_{rms}. L'affermazione di Eq. 7 è *del tutto generale*, cioè può essere applicata anche a forme d'onda diverse dalla sinusoidale, purché periodiche e alternate. Questo è il motivo per cui i valori rms (*root mean square*) hanno rilevanza pratica.

Può essere utile dare una rapida occhiata agli andamenti temporali delle funzioni che abbiamo considerato. La Fig. 1(a) mostra un'ipotetica forma d'onda sinusoidale $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ con ampiezza $f_0 = 1$ [arb.un.] (dunque ampiezza picco-picco $f_{pp} = 2$ [arb.un.]). L'asse delle ascisse corrisponde a un singolo periodo $T = 2\pi/\omega$. La curva nera tratteggiata rappresenta la funzione $f(t)$, la rossa continua è $f^2(t)$. Nella definizione di valore rms (Eq. 5) occorre calcolare l'integrale di quest'ultima funzione, che è proporzionale all'area sottesa alla curva (riempita di rosa in figura). Si vede come questa area, da prendere segnata, sia diversa da zero (e sempre positiva), mentre invece l'area sottesa a $f(t)$ è nulla, in accordo con il fatto che il segnale è alternato.

B. Forme d'onda quadre

Generalmente è sempre vero, almeno nei casi qui considerati, che $f_{rms} \propto f_0$. Per forme d'onda sinusoidali, come abbiamo appena analizzato, il coefficiente di proporzionalità è $1/\sqrt{2}$. L'obiettivo che ci prefiggiamo è ora quello di stabilire il coefficiente di proporzionalità per un'altra forma d'onda, per esempio per l'*onda quadra* (alternata, periodica e "simmetrica") rappresentata con la curva nera tratteggiata in Fig. 1(b).

Facendo il quadrato si ottiene una funzione costante di valore f_0^2 e l'area sottesa a questa curva è quella di un rettangolo. Ci vuole un attimo a verificare che, per una *forma d'onda quadra*:

$$f_{rms} = f_0 \ \text{ onda quadra .} \tag{8}$$

Dunque per un'onda quadra il fattore di proporzionalità è uno e il valore rms coincide con l'ampiezza.

C. Forme d'onda triangolari

Un altro caso interessante è quello dell'onda triangolare [Fig. 1(c)]. Anche stavolta il valore rms è non nullo e si vede che l'area sottesa alla curva $f(t)^2$ nel periodo è pari al quadruplo dell'area sottesa alla stessa funzione nel semiperiodo $t = (0, T/4]$.

Come si può facilmente verificare, in questo quarto di periodo si ha $f(t) = f_0 t/(T/4)$. Determiniamo allora f_{rms} per una *forma d'onda triangolare* (simmetrica):

$$f_{rms} = \sqrt{4 \times \frac{1}{T} \int_0^{T/4} \frac{f_0^2}{(T/4)^2} t^2 dt} = \tag{9}$$

$$= f_0 \sqrt{\frac{64}{T^3} \frac{T^3}{3 \times 64}} = \frac{f_0}{\sqrt{3}} \ \text{ onda triangolare .} \tag{10}$$

Dunque per un'onda triangolare il fattore di proporzionalità è $1/\sqrt{3}$.

II. MISURA RMS

Misurare il valore rms di una grandezza alternata è tutt'altro che banale. Nel futuro vedrete, spero vivamente, apparecchi che possono svolgere egregiamente questa funzione (ad esempio i "lock-in", o amplificatori a detezione sincrona). Sicuramente un multimetro portatile non contiene al suo interno raffinatezze che possano rendere sempre affidabile la valutazione, anche se il costruttore dichiara che è proprio il valore rms a essere restituito dallo strumento quando questo è impiegato per grandezze (tensioni e correnti) alternate.

Studiando un po' gli schemi (per esempio quello del multimetro analogico, che è disponibile, ma anche il digitale dovrebbe usare schemi simili), si vede come la misura rms avvenga in un modo diverso rispetto a quanto stabilito dalle definizioni matematiche, dato che non è semplice, in elettronica, costruire un segnale che sia il quadrato di un altro segnale.

A grandi linee, infatti, nei multimetri usati come voltmetri in alternata il segnale viene fatto passare attraverso un raddrizzatore (un diodo, ne parleremo più avanti) che in sostanza "taglia" (pone uguale a zero) le semionde negative. Quindi un circuito semplice semplice (un integratore, tra un po' vedrete di che si tratta) esegue una sorta di media temporale attraverso integrazione. Dunque non viene affatto calcolato il valore medio del quadrato della grandezza!

Per chiarire cosa questa operazione comporti, supponiamo di avere $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ (sappiamo già che $V_{rms} = V_0/\sqrt{2}$, in questo caso). Immaginiamo ora di tagliare la parte negativa e di fare la media temporale della sola semionda positiva, che chiamo $V_+(t)$:

$$< V_+ >= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} V_+(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_+(t)dt \ , \quad (11)$$

dove ho cambiato gli estremi di integrazione perché tanto, negli intervalli $(-T/2, -T/4]$ e $[T/4, T/2)$ la funzione fa zero (l'ho tagliata!). L'integrale da fare è del tipo: $\int_{-T/4}^{T/4} \cos(\omega t)dt$, il cui risultato è $2/\omega = T/\pi$ (provate!). C'è poi da moltiplicare questo integrale per $1/T$, da rimettere in situ l'ampiezza V_0, e da moltiplicare il risultato per 2 allo scopo di tenere conto del fatto che la media è stata misurata solo sulle semionde positive (e si suppone che quelle negative contino allo stesso modo): alla fine si ottiene, con ovvio significato dei termini, $< V_\pm >= 2V_0/\pi$. Il fattore $2/\pi$ così ottenuto *non* è uguale al fattore di proporzionalità $1/\sqrt{2}$, quello corretto per la valutazione di V_{rms} nel caso sinusoidale. In particolare, esso è inferiore di quanto dovuto per un fattore $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1$.

Il costruttore tiene conto di questo nella calibrazione dello strumento. Per esempio, nel multimetro analogico le scale per le grandezze alternate (marcate in rosso sul quadrante) non sono "allineate" con quelle per le grandezze continue (fateci caso quando vi capita!). Per il multimetro digitale, invece, è probabile che il costruttore tenga conto di questo aspetto inserendo opportune informazioni nel software che gestisce la visualizzazione sul display.

La conseguenza pratica ovvia, però, è che la calibrazione vale, nei limiti dichiarati dal costruttore, *solo per segnali sinusoidali*. In altre parole, usare il multimetro per determinare il valore rms di segnali che siano non sinusoidali comporta un errore di calibrazione, che dovrebbe risultare nella sovrastima per un fattore ≈ 1.1. È possibile che possiate accorgervi di ciò confrontando il valore rms (presunto) fornito dal multimetro con quello determinato a partire dalle misure con l'oscilloscopio, in particolare usando una forma d'onda quadra.

Ci sono poi ulteriori aspetti critici: come vedremo, l'operazione di integrazione dipende dalla frequenza. Questo è il motivo per cui il produttore del multimetro stabilisce un range di frequenze in cui la lettura è corretta (cioè affidabile entro la precisione dichiarata, che è dell'ordine dello 0.8-1%). Per il multimetro digitale tale range è dichiarato 40-400 Hz, ma sperimentalmente si dimostra che ci si può spingere oltre, fino ad alcuni kHz. Infine, e anche questo lo vedremo per bene, di fatto il taglio delle semionde negative, essendo affidato a un diodo a giunzione, viene eseguito solo quando la tensione sale al di sopra di un certo valore di soglia, tipicamente dell'ordine di poche centinaia di mV: ciò rende ancora meno affidabile la lettura rms di grandezze con piccola ampiezza. Se nel multimetro digitale il software del display può, almeno in parte, limitare gli effetti di questo problema, nello strumento analogico si è costretti a usare scale *non lineari* (tacchette non equispaziate tra loro): fateci caso quando vi capiterà di avere sotto mano il multimetro analogico!