Sciopero del 31 Marzo 2017

francesco.fuso@unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 2 - FF, 4 aprile 2017)

Queste poche righe intendono sostituire, per quanto possibile, i contenuti della lezione di Venerdì 31 Marzo 2017, che non si è tenuta causa sciopero dei servizi di portineria. Naturalmente vengono fornite solo le informazioni essenziali e strettamente necessarie per l'esecuzione dell'esperienza sulla auto e mutua induzione, prevista per la settimana successiva.

I. INTRODUZIONE E BACKRGROUND

L'esperienza pratica della prossima settimana, la numero 15 dell'anno in corso, prevede di svolgere un certo numero di osservazioni sperimentali su sistemi costituiti da uno o due avvolgimenti (induttori) accoppiati magneticamente fra loro. Parte delle conoscenze necessarie per l'esperienza è già nota; prima di procedere con la descrizione e discussione delle varie osservazioni sperimentali, è necessario completare il background di conoscenze attingendo da argomenti di base del corso di Fisica Generale.

A. Mutua induzione

Campi di induzione magnetica variabili nel tempo presenti in una qualche regione di spazio possono "accoppiarsi" a circuiti elettrici dando luogo a d.d.p. variabili nel tempo su questi circuiti. È infatti sufficiente che il circuito elettrico definisca una superficie sulla quale il flusso del campo di induzione magnetica variabile nel tempo sia non nullo; in queste condizioni l'equazione di Faraday mostra che viene indotta un d.d.p. variabile nel tempo, a cui, per circuiti elettrici ordinari, corrisponde una corrente variabile nel tempo.

Circuiti in grado di accoppiarsi con campi di induzione magnetica variabili nel tempo possono avere qualsiasi forma. Per esempio, uno spezzone di filo parte di un qualsiasi circuito tenuto in giro sul banco di laboratorio può certamente definire una linea contorno di una superficie qualsiasi all'interno della quale si trova un campo di induzione magnetica variabile nel tempo generato da chissà chi. Il filo, e il resto del circuito a cui esso è collegato, "sentono" il campo di induzione magnetica variabile nel tempo, che si traduce nella presenza di una d.d.p. variabile nel tempo. Tutti avete avuto esperienza di questi effetti che, molto spesso, danno luogo a dei segnali spuri classificati come rumore (una denominazione possibile è quella di *pick-up noise*).

Naturalmente l'esperienza pratica è progettata per verificare l'accoppiamento magnetico tra circuiti con geometria ben definita. Nella sostanza, infatti, vengono usati delle bobine, ovvero degli induttori, e si studia l'accoppiamento tra diverse bobine in diverse configurazioni supponendo trascurabili tutti gli altri effetti spuri.

Usiamo degli indici ij per indicare una coppia di queste bobine. Supponiamo che la bobina i-esima sia percorsa da una corrente, variabile nel tempo, $I_i(t)$: essa produce quindi un campo di induzione magnetica $\vec{B}_i$ variabile nel tempo che insiste in una certa regione di spazio. Immaginiamo quindi che in questa regione di spazio si trovi la bobina j-esima, e che esista una superficie delimitata dall'avvolgimento della bobina stessa (si intende la j-esima) su cui il flusso del campo $\vec{B}_i$ è non nullo. Indichiamo questo flusso come $\Phi_j(\vec{B}_i)$.

Definiamo *coefficiente di mutua induzione*, o *mutua induttanza*, della coppia di avvolgimenti ij la grandezza

$$M_{ji} = \frac{\Phi_{Sj}(\vec{B}_i(t))}{I_i(t)} \ . \tag{1}$$

È evidente che il coefficiente di autoinduzione L, quello che abbiamo già incontrato e utilizzato in varie occasioni, è un elemento diagonale della matrice M_{ji}, ovvero

$$L_i = M_{ii} \ . \tag{2}$$

Inoltre, come si può dimostrare in maniera rigorosa e come ci accontentiamo di intuire sulla base di argomenti di reciprocità (gli indici i e j possono scambiarsi tra loro senza modificare la configurazione geometrica del problema), si ha

$$M_{ji} = M_{ij} \ , \tag{3}$$

ovvero la matrice M_{ji} è simmetrica.

La d.d.p. (o forza elettromotrice) indotta dal campo $\vec{B}_i$ sull'avvolgimento j-esimo si scrive, usando la legge di Faraday

$$\varepsilon_j = -\frac{d\Phi_j(\vec{B}_i)}{dt} \ , \tag{4}$$

che, usando l'Eq. 1, diventa

$$\varepsilon_j = -M_{ji}\frac{dI_i(t)}{dt} \ . \tag{5}$$

La presenza di questa d.d.p. indotta, che abbiamo messo in relazione con la derivata temporale dell'intensità di corrente $I_i(t)$, produce una corrente indotta $I_j(t)$ nel circuito dell'avvolgimento j-esimo. Gli effetti possono essere trattati sia nel dominio del tempo che in quello delle frequenze. Per praticità, e in vista dell'esperienza pratica, in questa nota ci limitiamo allo studio nel dominio delle frequenze (siete invitati a pensare da soli alla trattazione nel dominio del tempo). Inoltre, sempre tenendo conto dell'esperienza e del fatto che in essa si hanno solo due avvolgimenti (gli indici i e j possono essere solo 1 o 2), per semplificare la notazione poniamo $M_{11} = L_1$, $M_{22} = L_2$, $M_{21} = M_{12} = M$.

B. Equazioni del primario e del secondario

Usando una terminologia tipica del mondo dei trasformatori, e quindi anticipando un argomento che tratteremo in seguito (sperabilmente de visu), indichiamo i circuiti che comprendono gli avvolgimenti 1 e 2 come rispettivamente *primario* e *secondario*. Supponiamo poi che in questi circuiti, oltre agli elementi reattivi di auto e mutua induzione, ci siano solo elementi resistivi, indicati con R_1 e R_2, eventualmente comprendenti anche le resistenze interne degli induttori, e ipotizziamo l'eventuale presenza di generatori di d.d.p. (si fa riferimento a una configurazione circuitale standard, soggetta a ulteriori chiarimenti e precisazioni secondo quanto illustreremo nel seguito), che esprimiamo in forma fasoriale come $V_{\omega 1}$ e $V_{\omega 2}$.

Le equazioni dei circuiti primario e secondario nel dominio delle frequenze si scrivono

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1)I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \tag{6}$$

$$V_{\omega 2} = (R_2 + j\omega L_2)I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1} \ , \tag{7}$$

dove abbiamo tenuto in debito conto l'effetto della mutua induzione. Infatti, per fare un esempio, a causa della mutua induzione il fasore di corrente $I_{\omega 1}$, responsabile per la creazione del campo $\vec{B}_1$, induce una d.d.p. variabile nel tempo nel circuito 2, che, espressa nel metodo simbolico, si scrive $j\omega M I_{\omega 1}$. Dunque l'accoppiamento magnetico tra primario e secondario si riflette, in generale, nell'accoppiamento tra le equazioni dei due circuiti.

Il coefficiente di mutua induzione M è determinato fondamentalmente dalla geometria del sistema (forma, dimensioni, numero spire degli avvolgimenti, orientazione reciproca degli assi degli avvolgimenti, loro distanza reciproca, eventuale presenza di materiali ferromagnetici, etc.). In parte, questi parametri sono anche quelli che determinano i coefficienti di autoinduzione, L_1 e L_2. Per motivi che risulteranno più chiari nel seguito della nota, può convenire esprimere M in funzione di L_1 e L_2 tramite la

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \ , \tag{8}$$

dove k è un numero, detto *coefficiente di accoppiamento magnetico*, compreso tra 0 e 1. È evidente che l'Eq. 8 mantiene la corretta dimensionalità delle grandezze coinvolte, nel senso che M e L hanno le stesse dimensioni e unità di misura (H).

C. Nuclei ferromagnetici e canalizzazione delle linee di campo

Avete già verificato come la presenza di un materiale *ferromagnetico* nel core di un induttore sia in grado di produrre diverse modifiche nel comportamento elettrico dell'induttore stesso. A parte la creazione di correnti parassite e i conseguenti effetti di dissipazione e "schermatura" del campo di induzione magnetica, i materiali ferromagnetici hanno la caratteristica di "amplificare" l'ampiezza del campo, e quindi tendono a far aumentare il coefficiente di autoinduzione.

Nel caso di accoppiamento magnetico tra circuiti elettrici c'è un ulteriore effetto rilevante che può essere distinto in modo sufficientemente chiaro. Ad esso diamo qui il nome di *canalizzazione* delle linee di campo di induzione magnetica.

Mostriamo questo effetto facendo riferimento a un argomento ampiamente discusso in ogni testo di Fisica Generale, e spesso accompagnato dal nome (molto misleading) di "rifrazione" del campo magnetico. Partiamo dall'assunto che il materiale ferromagnetico sia ben descritto da un coefficiente di *permeabilità magnetica relativa* $\mu_r >> 1$ e tale che all'interno del materiale sia

$$\vec{B} = \mu_r \vec{H} \ . \tag{9}$$

Per il momento prendiamo per buona la relazione lineare tra i campi $\vec{B}$ e $\vec{H}$ espressa da Eq. 9, senza preoccuparci delle specifiche proprietà del materiale (isteresi ferromagnetica) e della sua storia pregressa: su tutto questo avremo modo di tornare più avanti nel corso.

Le equazioni di Maxwell che definiscono i campi $\vec{B}$ e $\vec{H}$ sono, nell'approssimazione (quasi)-stazionaria che riteniamo valida,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \ , \tag{11}$$

con $\vec{J}$ densità di corrente elettrica. Supponendo di non avere correnti (di cariche "libere") che fluiscono nel o sul materiale ferromagnetico, si può porre $\vec{J} = 0$, cioè tutte e due le equazioni hanno secondo membro nullo

Immaginiamo allora di avere un'interfaccia che divide due regioni di spazio, interne ed esterne a un materiale ferromagnetico, e indichiamo con $\vec{B}_{int}$ e $\vec{B}_{ext}$ i campi di induzione magnetica nelle due regioni di spazio. Per costruire un problemino di magnetostatica, supponiamo di conoscere $\vec{B}_{ext}$, indicando con θ_{ext} l'angolo che tale vettore forma con la normale all'interfaccia in un certo punto. Usando una simbologia che fa riferimento alle componenti parallele e ortogonali all'interfaccia, si ha $B_{//ext} = B_{ext} \sin\theta_{ext}$ e $B_{\perp ext} = B_{ext} \cos\theta_{ext}$.

Le Eqs. 10, 11, integrate opportunamente in un intorno del punto considerato, la prima su un volume delimitato da una superficie chiusa Σ e la seconda su una superficie delimitata da una linea chiusa γ, danno luogo a

$$\int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0 \tag{12}$$

$$\oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0 \ , \tag{13}$$

dove $\hat{n}$ è il versore uscente dalla superficie di integrazione Σ in ogni suo punto e $d\vec{\ell}$ è elemento di γ.

Poiché siamo interessati a verificare il comportamento dei campi al passaggio per l'interfaccia, possiamo scegliere in maniera opportuna Σ e γ, per esempio considerando un barattolo con asse parallelo alla normale dell'interfaccia e altezza molto piccola (infinitesima) per Σ e un rettangolo con altezza parallela alla normale all'interfaccia, e anch'essa resa molto piccola (infinitesima), per γ. Come potete facilmente verificare da soli, quest'ultima scelta permette di estendere la validità delle affermazioni che stiamo per illustrare anche a casi non stazionari.

In queste condizioni le Eqs. 12, 13 forniscono delle *condizioni di continuità* sulle componenti dei campi che, con la nostra simbologia, recitano

$$B_{\perp ext} = B_{\perp int} \tag{14}$$
$$H_{//ext} = H_{//int} \ . \tag{15}$$

Poiché supponiamo valida l'Eq. 9, la seconda equazione di continuità si può riscrivere come

$$B_{//ext} = \frac{B_{//int}}{\mu_r} \ , \tag{16}$$

dove, coerentemente con la descrizione del problema, abbiamo posto $\mu_{r,ext} = 1$ (materiale non ferromagnetico, per esempio l'aria) e $\mu_{r,int} = \mu_r$.

Per la geometria, si ha, con ovvia definizione dei simboli,

$$\tan\theta_{int} = \frac{B_{//in}}{B_{\perp int}} = \mu_r \frac{B_{//ext}}{B_{\perp ext}} = \mu_r \tan\theta_{ext} \ . \tag{17}$$

Allora, se $\mu_r >> 1$ come stiamo imponendo, per qualsiasi valore di θ_{ext} si ha $\theta_{int} \rightarrow \pi/2$, cioè *le linee del campo di induzione magnetico all'interno di un materiale ferromagnetico tendono a disporsi parallelamente all'interfaccia.* In altre parole, un materiale ferromagnetico di una certa forma costituisce una sorta di tubo di flusso per $\vec{B}$, per cui le linee del campo sono *canalizzate* all'interno della forma stessa.

II. ESPERIENZA PRATICA

L'esperienza pratica prevede di determinare valori di L e M in diverse configurazioni. Essa dunque richiede come punto preliminare la messa a punto di un metodo, semplice e rapido, per valutare tali grandezze.

La misura di L (e anche di M) è un problema sperimentale e concettuale rilevante: su di esso torneremo esaminando una specifica configurazione di *ponte di misura*, che rappresenta un metodo piuttosto elegante e dotato di grossa rilevanza storica (molto minore è quella pratica). Per il momento limitiamoci a osservare che la misura di L è stata già eseguita in alcune esperienze pratiche, in particolare quelle in cui comparivano circuiti LC, ad esempio tramite misura della frequenza di risonanza nell'oscillatore forzato. Ci sono due motivi per cui questo approccio non è degno di essere replicato: (i) nell'esperienza che svolgerete *non* è previsto l'impiego di condensatori; (ii) in ogni caso, l'elevata tolleranza sulla capacità e l'assenza di un metodo indipendente per la misura di C rendono molto poco accurato tale metodo di misura.

Piuttosto, nell'esperienza che dovrete compiere si fa uso di resistori, che hanno il vantaggio di poter essere misurati (in continua!) con buona accuratezza usando un tester. Come sarà chiaro osservando gli schemi circuitali in uso nell'esperienza, essa prevede di fatto la costruzione di *filtri passa-basso*, ovvero *integratori*, RL. Si può facilmente verificare che in tali circuiti la funzione di trasferimento che lega "uscita" e "ingresso" è

$$T(f) = \frac{1}{1 + jf/f_T} \ , \tag{18}$$

dove f è la frequenza di lavoro, $f_T = R/(2\pi L)$ è la frequenza di taglio e abbiamo trascurato l'effetto di qualsiasi resistenza interna.

La frequenza di taglio f_T può essere determinata sperimentalmente, esattamente come fu fatto nel corso delle esperienze sui circuiti RC, e dalla sua conoscenza è possibile ricavare L con ragionevole accuratezza. Questa è una strada possibile, però ne esiste un'altra che porta con meno sforzo a ottenere valutazioni virtualmente dotate di simile accuratezza. Essa si basa sul fatto che, per $f > f_T$, cioè nel regime "di transizione" in cui il filtro passa-basso si comporta da integratore, si ha

$$A = |T(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}} \approx \frac{f_T}{f} \ . \tag{19}$$

Quindi dalla misura del guadagno, o attenuazione, A, dato dal rapporto tra le ampiezze (o ampiezze picco-picco) dei segnali in "uscita" e in "ingresso", eseguita a una certa frequenza che renda l'approssimazione di cui sopra ben verificata (tale do sostituire $\approx$ con $=$), si ha

$$L = \frac{R}{2\pi A f} \ , \tag{20}$$

che fornisce una misura di accuratezza virtualmente dipendente da quella con cui sono misurate R (tipicamente all'1%, o migliore), A (tipicamente $5-6\%$, se si usano i due canali dell'oscilloscopio, si considera l'errore di calibrazione e si suppone trascurabile il rumore ad alta frequenza, cosa per niente certa), f (tipicamente trascurabile con i frequenzimetri di cui siamo dotati).

Naturalmente la validazione del metodo dipende dalla bontà delle varie approssimazioni coinvolte. Operare nel regime di integratore significa, in pratica, che la componente reattiva prevale nettamente su quella resistiva del circuito (cioè $\omega L >> R$), in modo da ottenere uno sfasamento tra segnali in "ingresso" e in "uscita" quanto più prossimo a $\pi/2$ (in valore assoluto). Che lo sfasamento sia, nell'ambito delle incertezze, $|\Delta\phi| = \pi/2$ può essere facilmente verificato sperimentalmente, con un'accuratezza virtualmente limitata solo dall'errore di lettura dell'oscilloscopio. Ci sono poi altre approssimazioni rilevanti: a parte quella per cui trascuriamo ogni accoppiamento induttivo o capacitivo parassita (poniamo $C = 0$ e indichiamo con L l'induttanza dell'induttore considerato, e basta), c'è l'ipotesi, forte, di poter trascurare le resistenze interne. Esse possono essere eventualmente inserite nel modello, ma in ogni caso la resistenza interna dell'induttore è, come ben sappiamo, dipendente dalla frequenza per l'effetto di prossimità, in una forma che non sappiamo modellare in maniera affidabile. Chiaramente l'effetto della resistenza interna r dell'induttore diventa comparativamente meno rilevante scegliendo $R >> r$, opzione che però comporta un aumento di f_T, e dunque di $f > f_T$. In queste condizioni, r potrebbe aumentare e analogamente potrebbero diventare rilevanti gli effetti di accoppiamento spurio (Faraday prevede che tutti gli accoppiamenti scalino linearmente con la frequenza, nel caso di perturbazioni sinusoidali). Come regola generale, per evitare casini può essere consigliabile dimensionare il circuito in modo che la frequenza di lavoro f valga al massimo pochi kHz, con un limite dell'ordine della decina di kHz.

Anche se non è esplicitamente richiesto, come e più che al solito anche in questa esperienza si possono fare diverse divagazioni stimolate dal desiderio di andare un pochino oltre il livello di base, spingendosi nella direzione (in genere molto molto gratificante) che va verso il controllo più completo possibile dell'esperimento e della fisica che vi è coinvolta.

Qualche esempio di "stimolo" che mi viene in mente: (i) si potrebbero confrontare valori e incertezze di L valutata con il metodo indicato oppure attraverso individuazione sperimentale della frequenza di taglio f_T; (ii) per verificare il corretto funzionamento da integratore del circuito, si potrebbero usare altre forme d'onda diverse dalla sinusoidale; (iii) si potrebbe provare a tenere conto delle approssimazioni nella stima dell'incertezza su L; (iv) si potrebbero usare espressioni che tengono conto esplicitamente di r (questa è forse la più semplice delle cose da fare, anche se, purtroppo, non possiamo prevedere il valore di r per una data f).

III. ESPERIENZA

Passiamo finalmente alla descrizione/discussione dell'esperienza vera e propria, mettendo in luce le differenze e gli elementi di discussione/approfondimento che attengono ai vari punti.

A. Misura di L per int, ext, serie

Nel primo punto occorre proprio impiegare il metodo, o i metodi, appena discussi in Sec. II per valutare L nel caso dell'avvolgimento interno o esterno degli induttori di laboratorio, o nel caso della serie dei due che avete già frequentemente impiegato. Mi limito a ricordare che i valori attesi sono: $L_{int} \simeq 0.1$ H, $L_{ext} \simeq 0.2$ H, $L_{serie} \simeq 0.5$ H, essendo le differenze dovute sostanzialmente alle dimensioni fisiche (sezione "efficace") degli avvolgimenti e al numero delle spire (si ricorda che, come regola generale sulla cui illustrazione torneremo più avanti nel corso, $L \propto N^2$, con N numero di spire). È interessante notare che $L_{serie} \neq L_{int} + L_{ext}$, argomento che sarà spiegato in un punto successivo di questa stessa esperienza.

B. Secondario aperto e misura di M

Nel secondo punto si richiede di usare due avvolgimenti realizzando dunque un sistema con circuito primario e secondario (il primario insiste sull'avvolgimento esterno, il secondario sull'interno, che, ovviamente, la geometria garantisce essere accoppiati magneticamente). In particolare, al secondario è collegato il solo oscilloscopio: a causa dell'elevata resistenza di ingresso, queste condizioni somigliano parecchio a quelle di un *circuito aperto*, poiché la corrente che circola nel secondario e nell'oscilloscopio può ragionevolmente essere ritenuta trascurabile (si può quantificare, ma non è molto interessante). Osservate che nell'esperienza si richiede la misura non contemporanea di tre segnali: avendo l'oscilloscopio solo due canali, è ovvio che dovrete commutare manualmente tra i segnali di interesse (staccare e riattaccare le banane in diversi punti, nulla di più semplice).

Partendo dalle Eqs. 6, 7, vediamo come è possibile determinare M. A secondario aperto, si può ragionevolmente porre $I_{\omega 2} = 0$. Dunque il set di equazioni diventa

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} \tag{21}$$
$$V_{\omega 2} = j\omega M I_{\omega 1} \ , \tag{22}$$

con $R_1 = R$ se si tiene conto dello schema dell'esperienza e si trascurano le resistenze interne.

Poiché nell'esperienza viene anche misurato un segnale, denominato V_R, che è rappresentativo della corrente che scorre nel primario (usando la simbologia dell'esperienza è $V_{\omega R} = R I_{\omega 1}$), si ottiene

$$V_{\omega 2} = \frac{j\omega M}{R} V_{\omega R} \ , \tag{23}$$

da cui, dette V_2 e V_R le ampiezze, o ampiezze picco-picco, dei rispettivi segnali

$$M = \frac{R}{2\pi f} \frac{V_2}{V_R} \ . \tag{24}$$

Questa equazione ha il vantaggio di permettere la determinazione di M senza fare uso di approssimazioni sul guadagno, o attenuazione, del primario, e dunque dovrebbe essere valida a qualsiasi valore di f. Tuttavia in essa si suppone trascurabile la resistenza interna dell'induttore al primario (l'avvolgimento esterno della bobina), affermazione la cui validità dipende, in linea di principio, dalla frequenza di lavoro f.

La validità dell'Eq. 23 può essere facilmente verificata misurando lo sfasamento tra $V_{\omega 2}$ e $V_{\omega R}$, che deve ovviamente risultare pari a $\pi/2$ in valore assoluto.

Naturalmente, in forma alternativa e facoltativa, è possibile anche ricavare M dalle misure di V_2 e V_1. A questo scopo è sufficiente combinare le Eqs. 21, 22, ottenendo

$$V_{\omega 2} = \frac{j\omega M}{R_1 + j\omega L_1} V_{\omega 1} \ . \tag{25}$$

Supponendo di essere nel regime di frequenze in cui il primario si comporta da integratore, si ha $\omega L_1 >> R_1$, per cui il denominatore dell'equazione diventa immaginario. In queste condizioni si ottiene

$$V_{\omega 2} = \frac{M}{L_{ext}} V_{\omega 1} \ , \tag{26}$$

dove abbiamo posto $L_1 = L_{ext}$ per rispettare la simbologia dell'esperienza e della sua scheda. Da qui si ricava

$$M = L_{ext} \frac{V_2}{V_1} \ , \tag{27}$$

che è attesa portare a risultati compatibili con quelli dati da Eq. 24. Dell'Eq. 27 faremo uso trattando del trasformatore: per il momento limitiamoci a notare che essa è *apparentemente* indipendente dalla frequenza, anche se la sua validità dipende dal fatto che il primario si comporti da integratore (affermazione che richiede $f > f_T$).

C. Reciprocità

È interessante verificare sperimentalmente il carattere simmetrico della matrice di mutua induzione. La verifica si può fare in maniera pressoché immediata scambiando gli avvolgimenti interno ed esterno e ripetendo la stessa misura del punto precedente: i due valori di M che si ottengono per le due configurazioni devono essere compatibili fra loro.

Riprendiamo ora la definizione di coefficiente di accoppiamento magnetico k, Eq. 8: se l'accoppiamento fra primario e secondario fosse "completo", allora *tutto* il flusso di campo di induzione magnetica generato dall'uno sarebbe risentito dall'altro circuito. Nel nostro contesto, in cui gli effetti dell'accoppiamento risultano in d.d.p. indotte, ciò implicherebbe

$$j\omega L_1 I_{\omega 1} = j\omega M I_{\omega 2} \tag{28}$$

$$j\omega L_2 I_{\omega 2} = j\omega M I_{\omega 1} \ . \tag{29}$$

Combinate assieme, queste due equazioni portano a $M^2 = L_1 L_2$. È ragionevole attendersi che, nel caso realistico di accoppiamento non completo, il coefficiente di mutua induzione diminuisca rispetto al valore massimo $\sqrt{L_1 L_2}$, e il coefficiente k introdotto in Eq. 8 tiene proprio conto di ciò. Naturalmente, nel caso di circuiti completamente disaccoppiati magneticamente tra loro, ovvero accoppiati in modo trascurabile, $M \to 0$, per cui k può assumere valori compresi tra 0 e 1.

Nell'esperienza si richiede di valutare il coefficiente di accoppiamento tra avvolgimento interno ed esterno (o viceversa) della bobina, che dovrebbe essere relativamente grande, ma non unitario a causa della presenza di linee di flusso prodotte da uno degli avvolgimenti che se ne vanno in giro per il mondo senza necessariamente passare concatenarsi con la sezione dell'altro avvolgimento.

D. Secondario chiuso e induttanza "apparente" del primario

Questo punto dell'esperienza richiede, in sostanza, di eseguire nuove misure del coefficiente di autoinduzione L, naturalmente da fare con il metodo (qui ne basta uno) descritto in Sec. II e già impiegato al punto III A, nel caso in cui il secondario sia cortocircuitato su se stesso. In particolare, la scheda richiede di usare come primario e secondario gli avvolgimenti rispettivamente interno ed esterno della bobina.

In queste condizioni si verifica qualcosa di probabilmente inatteso, almeno da un punto di vista naïf: l'induttanza di un avvolgimento si modifica (diminuisce) per effetto dell'accoppiamento magnetico con l'altro avvolgimento.

Il modello del fenomeno può agevolmente essere ricavato usando ancora le Eqs. 6, 7: stavolta, essendo il secondario chiuso su se stesso, si ha $I_{\omega 2} \neq 0$, ma $V_{\omega 2} = 0$ (non c'è d.d.p. a causa del cortocircuito). Le Eqs. 6 diventano allora

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \tag{30}$$

$$0 = (R_2 + j\omega L_2) I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1} \ , \tag{31}$$

da cui si ricava

$$I_{\omega 2} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} I_{\omega 1} \approx -\frac{M}{L_2} I_{\omega 1} \ . \tag{32}$$

L'ultimo passaggio di Eq. 32 è tanto più verificato, cioè il simbolo $\approx$ somiglia sempre più a $=$, quanto più R_2 è minore di ωL_2. Poiché nell'esperienza al secondario non viene aggiunta alcuna resistenza "esterna", operando alle frequenze per cui il primario si comporta da integratore l'approssimazione dovrebbe essere ben verificata.

Supponendola valida, sostituendo si ottiene

$$V_{\omega 1} = \left[R_1 + j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \right] I_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1') I_{\omega 1} \ , \tag{33}$$

con

$$L_1' = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = \frac{L_1 L_2 - k^2 (L_1 L_2)}{L_2} = L_1 (1 - k^2) \ , \tag{34}$$

dove abbiamo usato il coefficiente di accoppiamento magnetico k definito in Eq. 8.

Per usare la terminologia dell'esperienza e della relativa scheda, deve essere $L'_{int} = L_{int}(1 - k^2) = L_{int} - M^2/L_{ext}$, cioè l'induttanza del primario viene *diminuita* rispetto a quanto si verifica quando il secondario "non c'è" (è aperto o non accoppiato magneticamente al primario).

Questo risultato non è del tutto ovvio, ma, in qualche forma, di esso vi siete già resi conto in un'altra esperienza. Ricordate infatti che, nell'esperienza su correnti parassite, e non solo, l'induttanza della bobina veniva modificata dalla presenza di un materiale conduttore nel nucleo. In modo tanto grossolano quanto immediato, in questo modo alla bobina (primario) si accoppiava magneticamente un secondario, costituito dalle correnti parassite sulla pelle del conduttore infilato nel nucleo: infatti, nel caso di materiale non ferromagnetico, l'induttanza misurata diminuiva, in accordo, almeno qualitativo, con il modello di Eq. 34. Magari qualcuno potrebbe spingersi oltre e trovare qualche ulteriore stimolo per ri-considerare i risultati di quella esperienza.

E. Serie e "anti-serie"

Disponendo di un primario e di un secondario indipendenti, può venire voglia di collegarli fra di loro in serie o in parallelo. Il parallelo non viene considerato nell'esperienza, e la sua trattazione di modello viene lasciata con piacere per esercizio. La serie, però, vale la pena di considerarla.

In realtà il collegamento in serie tra i due avvolgimenti della bobina è già stato realizzato e impiegato, in questa esperienza e in tante altre precedenti. Esso è normalmente effettuato dal cavetto (corto) che collega le boccole "centrali" sul corpo dell'induttore: usato come in genere si fa, esso dispone i due avvolgimenti interno ed esterno in modo tale che il verso di percorrenza delle correnti sia "concorde". Se ci pensate, alternando le boccole è possibile fare in modo che il collegamento risulti in un verso "discorde" di percorrenza della corrente nei due avvolgimenti (è una di quelle operazioni più semplici da fare che da descrivere). Se nel primo caso il collegamento è detto *in serie*, nel secondo piò essere definito in *anti-serie*.

Cerchiamo anche per queste configurazioni un modello basato sulle Eqs. 6, 7: il collegamento in serie implica ovviamente $I_{\omega 1} = I_{\omega 2} = I_\omega$. Inoltre il fasore che descrive la d.d.p. ai capi della serie, $V_{\omega serie}$, indicato nelle schede dell'esperienza con il pedice 1, è dato dalla somma dei fasori $V_{\omega 1} + V_{\omega 2}$ di Eqs. 6. Allora l'unica equazione che serve per descrivere il circuito nel dominio delle frequenze (unica perché primario e secondario sono in serie tra loro) diventa

$$V_{\omega serie} = [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]I_\omega \ , \qquad (35)$$

cioè il sistema serie si comporta come un singolo induttore di induttanza $L_s = L_1 + L_2 + 2M = L_{int} + L_{ext} + 2M$, volendo fare riferimento all'esperienza.

Se il collegamento è in anti-serie, allora occorre mettere $I_{\omega 1} = -I_{\omega 2}$, circostanza che porta molto facilmente a $L'_s = L_1 + L_2 - 2M = L_{int} + L_{ext} - 2M$. Questi nuovi valori del coefficiente di autoinduzione per il sistema serie e anti-serie possono essere misurati, facendo sempre uso del metodo discusso in Sec. II e impiegato al punto III A; i risultati ottenuti dovrebbero essere compatibili con le previsioni basate sulle misure individuali di L_{int}, L_{ext}, M svolte in questa esperienza.

F. Due bobine e ferri

Gli ultimi punti dell'esperienza prevedono di usare come primario e secondario due distinte bobine, ognuna delle quali con gli avvolgimenti collegati in serie. Le due bobine vanno collocate fianco a fianco, in modo che le facce di maggior superficie siano a contatto e che i due core siano coassiali. Supponendo che le due bobine siano identiche tra loro, i coefficienti di autoinduzione sono già noti (sono gli L_s misurati in precedenza) e non c'è bisogno di ripetere le misure: l'affermazione dovrebbe essere ben verificata, considerando l'incertezza sulla valutazione di L_s, che qui gioca il ruolo di tolleranza di fabbricazione. L'esperienza richiede dunque di determinare i coefficienti di mutua induzione, operazione che può essere agevolmente compiuta usando il metodo sviluppato per il punto III B. Avendo misurato M, e conoscendo L_s, è possibile determinare il coefficiente di accoppiamento magnetico k nelle varie condizioni richieste.

Poiché le bobine sono, di fatto, degli avvolgimenti di dimensioni finite (in particolare la "lunghezza", che certamente non è infinita come per i solenoidi modello che si trovano nei testi di Fisica Generale), è lecito aspettarsi che ci sia un flusso non nullo del campo di induzione magnetica prodotto dall'una concatenato con la sezione dell'altra. Di conseguenza, è lecito aspettarsi un coefficiente di mutua induzione diverso da zero, e presumibilmente minore, per motivi principalmente geometrici, rispetto a quello misurato al punto III B.

Le stesse misure devono poi essere ripetute infilando nel core dei nuclei di materiale ferromagnetico (il pieno a sezione quadra e il laminato già usati in altre esperienze). In queste condizioni ci si possono attendere diversi effetti, alcuni dei quali vi sono già noti, anche se in maniera poco distinta. Infatti già sapete, almeno dal punto di vista qualitativo, cosa succede a carico dei coefficienti di autoinduzione: avendo sviluppato in questa esperienza un metodo efficace per la misura di questi coefficienti (quello descritto in Sec. II e impiegato al punto III A), potrete e dovrete a questo punto ri-utilizzarlo per questa nuova configurazione. Inoltre sapete come le correnti parassite indotte sulla superfici dei materiali tendano da una parte ad aumentare la dissipazione (corrispondente nel nostro modello ad un aumento della resistenza) e dall'altra a "schermare" il campo di induzione magnetica nella regione del nucleo. Notate che tutti questi effetti potrebbero anche modificare le condizioni di approssimazione eseguite al punto III A, nel senso che la frequenza di taglio dell'integratore al primario potrebbe modificarsi in maniera significativa rispetto alle misure condotte senza nucleo. Avendo tempo, un rapido controllo, basato per esempio sulla misura dello sfasamento tra d.d.p. e corrente nel primario (atteso prossimo a $\pi/2$, in valore assoluto), potrebbe essere più che opportuno.

L'aspetto più significativo dovrebbe in ogni caso risultare la modifica del coefficiente di mutua induzione conseguente all'inserimento del materiale ferromagnetico nel nucleo delle bobine, che è interpretabile come diretta conseguenza del fenomeno di canalizzazione delle linee di flusso all'interno del materiale. Questo fenomeno aumenta, di fatto, il flusso di $\vec{B}$ concatenato con la sezione del secondario, "piegando" alcune linee di campo che "sfuggirebbero" e indirizzandole all'interno del secondario: sulla base della definizione stessa di coefficiente di mutua induzione, Eq. 1, aumenta M. Notate che lo stesso effetto non può essere attribuito alle correnti parassite: esse, infatti, dovrebbero estinguersi su una scala spaziale dell'ordine della profondità di pelle uscendo subito al di fuori del core del primario: una riprova potrebbe essere eseguita usando un materiale conduttore non ferromagnetico.

Anche se in termini più qualitativi che quantitativi, è anche possibile studiare altri aspetti dovuti alla presenza del materiale e connessi, per esempio, alla dissipazione e alle correnti parassite. Inoltre, anche una revisione generale dei principali risultati dell'esperienza, in particolare un confronto tra i valori del coefficiente di accoppiamento magnetico misurato nelle varie configurazioni, potrebbe essere di interesse. Ancora, potrebbe essere interessante, come suggerito nella scheda, ripetere misure per configurazioni geometriche diverse (bobine allontanate tra loro, con o senza nucleo ferromagnetico, bobine con assi inclinati, bobine di diversa forma, etc.). Pur senza obbligatorietà, visto che ormai siete grandi, siete sicuramente invitati a considerare nella pratica il maggior numero di possibilità che l'esperienza offre e a coprire il maggior numero di aspetti fisici che essa abbraccia e coinvolge.