Traiettoria di un proiettile

Si consideri lo sparo di un proiettile da parte di un cannone e cerchiamo di determinarne la traiettoria. Nell'ipotesi che gli agenti atmosferici siano trascurabili (resistenza dell'aria, vento, turbolenze, etc...) il moto di un proiettile dipende soltanto dalle condizioni di lancio e dall'accelerazione di gravità. Scegliamo il sistema di riferimento in cui descrivere il moto con l'origine coincidente nel punto in cui avviene lo sparo e l'asse delle Z diretto lungo la normale alla superficie terrestre. In questo sistema l'accelerazione di gravità è rappresentata dal vettore $\vec{g}=(0,0,-g)$ con g = 9.81 m/s^2, il vettore è orientato verso il basso in direzione anti-parallela all'asse delle Z. Misuriamo il tempo fissando l'origine t = 0 nell'istante in cui avviene lo sparo. Occorre ancora specificare la velocità iniziale impartita al proiettile dal cannone. Osserviamo che è possibile orientare il sistema di riferimento in modo che la componente Y della velocità iniziale sia nulla. Con questa scelta la velocità iniziale vale $\vec{v}_0=\dot{\vec{r}}(0)=(v_0\cos\alpha, 0, v_0\sin\alpha)$ dove l'angolo α rappresenta l'inclinazione del cannone rispetto al terreno. Il modulo v_0 dipende dai dettagli dell'esplosione che mette in moto il proiettile. In ogni istante le accelerazioni sono date dal sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases}$$

Una prima integrazione fornisce l'andamento della velocità con il tempo, una seconda integrazione ci da le coordinate in funzione del tempo. Le integrazioni sono fatte scegliendo come limite inferiore di integrazione l'origine dei tempi t = 0 e come limite superiore l'istante t generico.

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{q}(t)\,dt = q(t_2)-q(t_1)$$

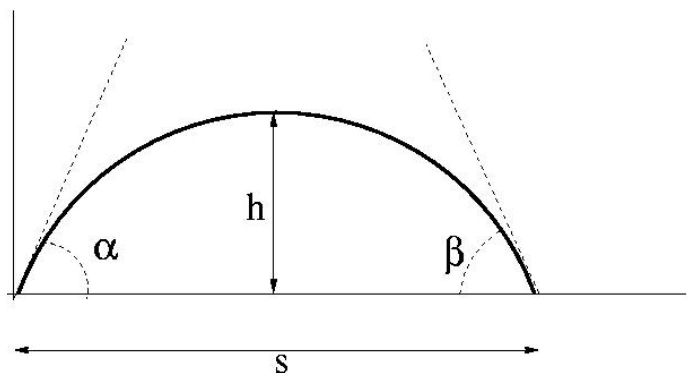
Per tanto effettuando due integrazioni abbiamo in successione:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = v_0\sin\alpha - g\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = 0 \\ z = (v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

Riconosciamo lungo l'asse X un moto rettilineo uniforme e lungo l'asse Z un moto uniformemente accelerato. L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo dal sistema che fornisce le coordinate. Ricaviamo il tempo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella terza:

$$z=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

Riconosciamo l'equazione di una parabola con la concavità rivolta verso il basso.



$$s=\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

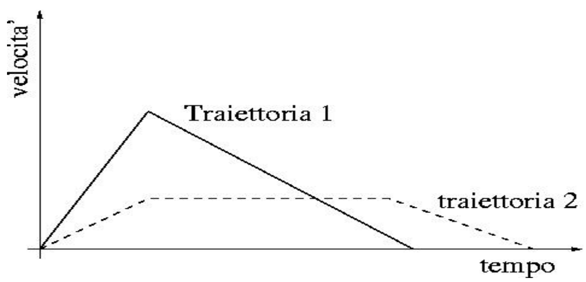
La distanza S tra i due zeri della parabola rappresenta la gittata, l'angolo α è l'angolo di tiro e β è l'angolo di impatto, l'altezza massima a cui si porta il proiettile è h.
La gittata si deduce trovando l'interesezione della parabola con l'asse X (z=0), l'angolo di impatto per simmetria è uguale all'angolo di tiro[1], il tempo di volo T del proiettile si deduce dal moto rettilineo uniforme lungo l'asse X valutando quanto tempo è necessario per percorre una distanza pari alla gittata.
Osserviamo che l'angolo che realizza la gittata massima è $\alpha = \pi/4$. Se invece fissiamo la distanza bersaglio - cannone e lasciamo liberi la velocità iniziale e l'angolo di tiro vediamo che esistono infinite combinazioni di v_0 e α tali da centrare il bersaglio.
Ci si potrebbe domandare quale sia la combinazione che rende minima la velocità iniziale. Considerato che la velocità iniziale dipende in qualche modo dalla quantità di polvere da sparo utilizzata, minimizzare la velocità può essere utile qualora si voglia usare con parsimonia l'eventuale "poca" polvere da sparo disponibile. Tenendo fisso S e minimizzando v_0 , si trova che l'angolo ottimale è ancora $\alpha = \pi/4$. Quindi il metodo più economico per centrare un bersaglio è quello di regolare il tiro in modo da avere il bersaglio nella posizione di gittata massima.

1) l'uguaglianza dei due angoli in genere non vale in presenza di altre forze oltre a quella di gravità

ESERCIZIO 2

Il motore di un veicolo fornisce accelerazioni limitate in $-\beta \le a \le \alpha$ **(α,β numeri positivi). Si determini il tempo minimo necessario per coprire la distanza L.**

(il veicolo ovviamente parte da fermo e si ferma all'arrivo)



Ci si convince facilmente che la curva oraria che minimizza il tempo necessario per effettuare lo spostamento non deve contenere tratti di moto rettilineo uniforme. In figura sono mostrate due traiettorie possibili nel piano velocità-tempo, l'area sottesa da entrambe le curve deve essere la stessa essendo lo spazio da percorrere il medesimo.
Si vede chiaramente che la presenza di tratti in moto uniforme tendono ad allungare il tempo impiegato. Il tempo minimo è dunque associato ad un "triangolo" tipo quello della traiettoria (1) , in particolare a quello avente altezza massima. Tale triangolo corrisponde ad un primo tratto percorso con accelerazione massima ed un secondo tratto percorso con la massima decelerazione.
L'istante t_x in cui si passa dalla accelerazione alla decelerazione si trova imponendo che al tempo t_x la velocità a destra sia uguale a quella a sinistra, inoltre al tempo T la velocità deve annullarsi.

$$\alpha t_x = \beta (T - t_x)$$

Imponendo che l'area sottesa eguagli lo spazio L da percorrere si ha

$$T = \sqrt{2L \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta}}$$

La formula è simmetrica per scambio α <—> β, quale simmetria nasconde il problema ?