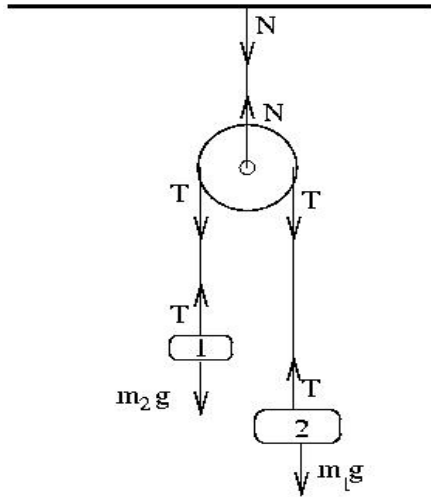


ESERCIZIO 1

La Macchina di Atwood



Note le masse m_1 e m_2 si vuole determinare il moto del sistema, la tensione T del filo e la reazione vincolare N del soffitto a cui la puleggia è appesa.
Il filo è inestensibile, le masse del filo e della puleggia sono trascurabili.

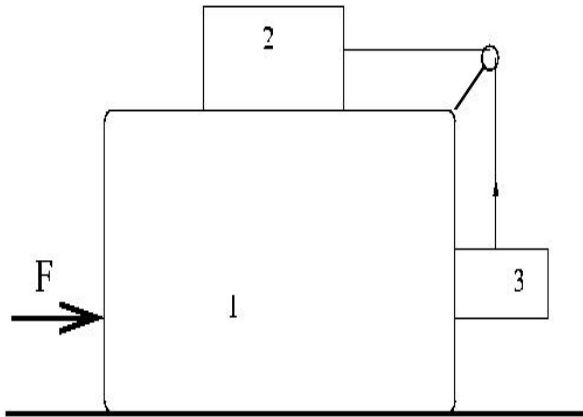
Indicando con a_1 e a_2 le accelerazioni delle masse m_1 e m_2 , la condizione che il filo sia inestensibile si formalizza come $a_1 = -a_2 = a$

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g + T & \text{equazione del moto massa } m_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 g + T & \text{equazione del moto massa } m_2 \\ N = 2T & \text{massa della puleggia nulla} \\ \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 & \text{filo inestensibile} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \\ T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{array} \right.$$

Si noti che per scambio degli indici $1 \leftrightarrow 2$ l'accelerazione è antisimmetrica mentre la tensione della fune è simmetrica, ce lo si poteva aspettare anche senza fare i conti?

ESERCIZIO 2

Quale forza F bisogna applicare affinché la terza massa non si muova verticalmente ?



Definizioni:

- N: reazione vincolare del piano
- Q: forza di contatto tra M1 e M3
- R: forza di contatto tra M1 e M2
- T: tensione del filo

Equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F - Q - T \\ m_1 \ddot{y}_1 = N - m_1 g - R - T \\ m_2 \ddot{x}_2 = T \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + R \\ m_3 \ddot{x}_3 = Q \\ m_3 \ddot{y}_3 = -m_3 g + T \end{cases}$$

Vincoli

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 0 & \text{la massa } m_1 \text{ non si muove verticalmente} \\ \ddot{y}_2 = 0 & \text{la massa } m_2 \text{ non si muove verticalmente} \\ \ddot{x}_1 = \ddot{x}_3 & \text{le masse } m_1 \text{ e } m_3 \text{ restano in contatto} \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - \ddot{y}_3 = 0 & \text{condizione di inestensibilità del filo} \\ \ddot{y}_3 = 0 & m_3 \text{ non si muove verticalmente} \end{cases}$$

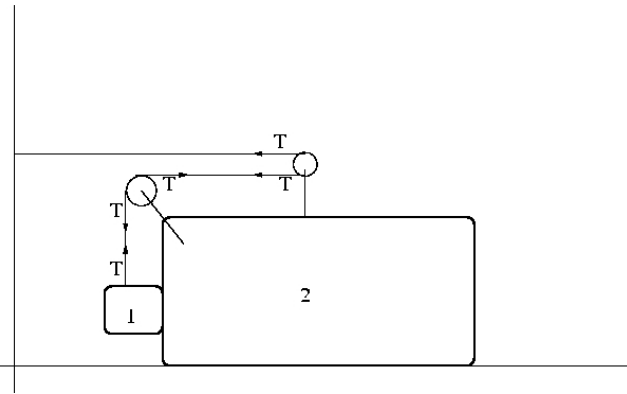
Le equazioni del moto e i vincoli forniscono 11 equazioni corrispondenti alle 6 accelerazioni incognite e alle 5 forze incognite (F,Q,T,R,N) per tanto è risolvibile.

Imponendo nell'ultima equazione del moto $\ddot{y}_3 = 0$ si deduce la tensione della fune

$T = m_3 g$. Indicando con a l'accelerazione orizzontale comune alle 3 masse si ottiene:

$$\begin{cases} a = \frac{m_3}{m_2} g \\ F = (m_1 + m_2 + m_3) a \end{cases}$$

ESERCIZIO 3



Definizioni:

- N: reazione vincolare del piano
- T: tensione della fune
- Q: forza di contatto tra m_1 e m_2

Equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -Q \\ m_1 \ddot{y}_1 = T - m_1 g \\ m_2 \ddot{x}_2 = Q - T \\ m_2 \ddot{y}_2 = N - T - m_2 g \end{cases}$$

equazioni dei vincoli

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 & \text{condizione di contatto tra 1 e 2} \\ \ddot{y}_1 = \ddot{x}_2 & \text{condizione filo inestensibile} \\ \ddot{y}_2 = 0 & \text{piano di appoggio} \end{cases}$$

Abbiamo 7 incognite e 7 equazioni, il sistema è determinato. Indicata con a l'accelerazione orizzontale comune a M_1 e M_2 e eliminando Q tra la prima e la terza si ottiene $T = -(m_1 + m_2)a$ e quindi $a = -m_1 g / (2m_1 + m_2)$

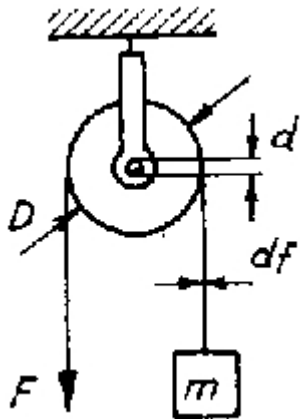
Digressione sulle carrucole (fonte Wikipedia!)

La **carrucola** è una [macchina](#) semplice atta al sollevamento di carichi. In marina viene chiamata anche **bozzello**. È costituita da una [ruota](#), detta **puleggia**, impernata su una staffa. Sul bordo della ruota è scavato un solco in cui scorre una [corda](#), una [fune](#) od una [catena](#).

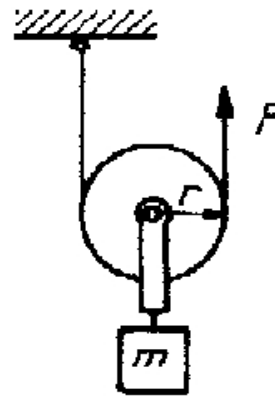
Esistono almeno due tipi di carrucole quelle fisse e quelle mobili.

Nella **carrucola fissa**, l'asse della puleggia è fisso, e la ruota ha la sola funzione di deviare la [forza](#) applicata ad una estremità della fune. L'altra estremità è collegata al

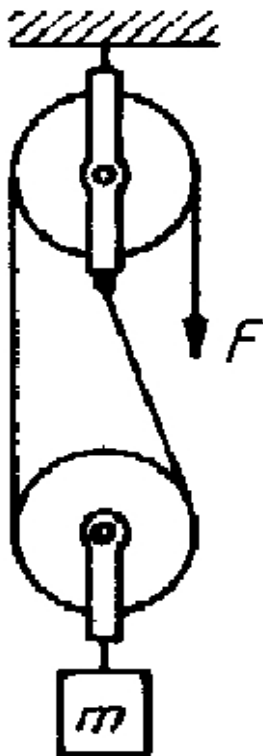
carico. Il rapporto tra la forza attiva e la forza resistente all'equilibrio è pari ad uno. Nella **carrucola mobile** l'asse della puleggia è mobile solidalmente con il carico sollevato. L'estremità della fune opposta a quella di lavoro è vincolata ad un punto fisso rispetto al sistema. In condizioni di equilibrio la forza applicata alla fune è pari alla metà della forza peso agente sulla carrucola. In pratica, per sollevare il carico di un metro è necessario tirare la fune per due metri.



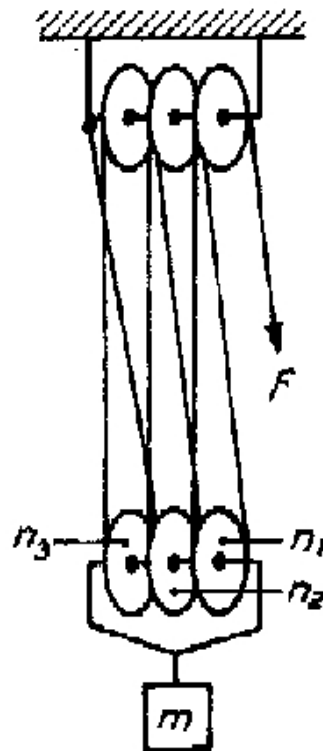
Carrucola fissa



Carrucola Mobile



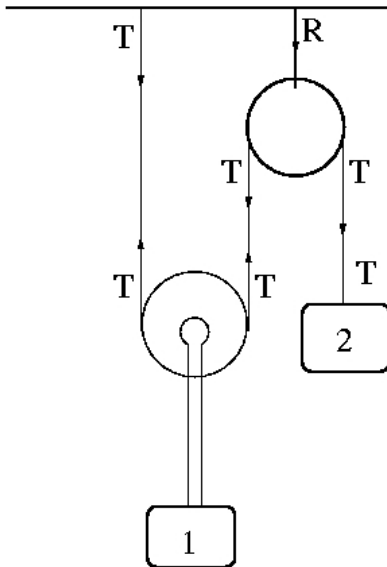
Paranco semplice costituito da una carrucola mobile e una fissa che serve da rinvio



Paranco multiplo composto da diverse carrucole mobili

ESERCIZIO 4

Carrucola mobile



Definizioni:

T: tensione della fune

R: reazione vincolare della parete

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + 2T & \text{Moto massa } m_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T & \text{moto massa } m_2 \\ R = 2T & \text{puleggia fissa} \\ \ddot{y}_2 = -2\ddot{y}_1 & \text{filo inestensibile} \end{cases}$$

Risolvendo si ha $\ddot{y}_1 = \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g$

Si noti che l'equilibrio (accelerazione nulla) si ha quando la massa 2 è la metà della massa 1. Nel caso della macchina di Atwood (carrucola fissa) l'equilibrio richiede invece l'uguaglianza delle due masse.