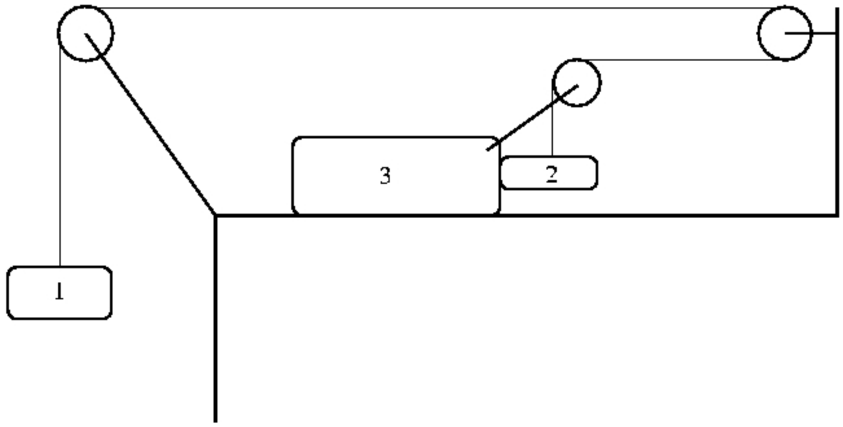


Nel sistema rappresentato in figura, inizialmente è applicata una forza opportuna alla massa centrale in modo da mantenerla ferma. Si determini il moto delle masse 1 e 2.

La massa 3, mantenuta ferma, si comporta a tutti gli effetti del moto come se fosse solidale alle pareti fisse ed assimilabile ad esse. Il sistema composto da 1 e 2 risulta equivalente ad una macchina di Atwood con la sola differenza che il cammino del filo è reso un po' più tortuoso. La macchina di Attwod è già stata discussa e sappiamo che accelerazione e tensione del filo valgono:

$$\ddot{y}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \qquad ; \qquad T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_2 + m_1}$$

Ora si rilascia l'ipotesi che la massa 3 sia bloccata, discutere il moto del sistema.

Indicata con Q la forza di contatto tra M2 e M3 e con N la reazione vincolare del piano di appoggio

Equazioni del moto

vincoli

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = 0 & (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + T & (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = Q & (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T & (4) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -Q + T & (5) \\ m_3 \ddot{y}_3 = N - m_3 g - T & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 & \textit{Contatto } m_2 m_3 \\ \ddot{y}_3 = 0 & \textit{Piano di appoggio} \\ \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{x}_3 = 0 & \textit{filo inestensibile} \end{cases}$$

In generale osserviamo che la forza di contatto Q è ovviamente sempre associata ad una condizione di contatto ed è quindi facilmente eliminabile dal sistema. Combinando le equazioni (3) e (5) con il primo dei vincoli si ha

$$T=(m_2+m_3)\,\ddot{x}_3$$

Cerchiamo ora di manipolare il sistema in modo da poter utilizzare la condizione di inestensibilità del filo, moltiplichiamo la (2) per m2 e la (4) per m1 e sommiamole a membro a membro:

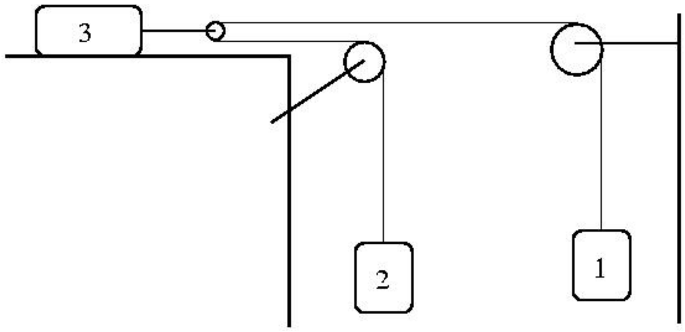
$$(m_1+m_2)T=2\,m_1 m_2 g+m_1 m_2 \ddot{x}_3$$

Combinando queste ultime due equazioni si determina la tensione della fune.
Nota la tensione è facile ricavare tutte le altre quantità.

Digressione: gli studenti si domandano perchè dobbiamo fare questi noiosi esercizi in cui sostanzialmente si devono risolvere astrusi sistemi di equazioni lineari. Lo scopo è *in primis* didattico: saper manipolare i sistemi lineari è utile tenendo conto che tali sistemi si presentano frequentemente. Ad esempio la legge "lineare" di Ohm tra tensione e corrente elettrica genera sistemi di equazioni lineari quando si vogliano risolvere circuiti percorsi da correnti continue, i circuiti a correnti alternate inducono sistemi di equazioni differenziali lineari, etc.....
Un altro motivo, più culturale, consiste nel fatto che le macchine "meccaniche" di cui ci occupiamo sono sostanzialmente riconducibili alla domanda "come si fa a sollevare una massa ?".
La risposta ovvia, "brute force", è che basta applicare una forza pari al peso della massa da innalzare.
Un modo meno brutale per affrontare la questione consiste nell'inventarsi una macchina che abbia un opportuno vantaggio meccanico. Il vantaggio meccanico è definito come il rapporto tra il peso da sollevare e la forza da applicare $\eta=mg/F$. La carrucola semplice ha $\eta=1$ e non è un granchè come soluzione al problema del sollevamento. La carrucola mobile ha $\eta=2$ che rappresenta un significativo passo avanti (si fa la metà della fatica). Ovviamente già gli antichi conoscevano empiricamente metodi poco faticosi per sollevare pesi altrimenti non avrebbero potuto innalzare Dolmen, Mehnir, templi o piramidi, tuttavia gli scienziati ellenistici (Archimede in testa) sono stati i primi a "progettare scientificamente" delle macchine che avessero un assegnato vantaggio meccanico[1]. Dare corpo ad una teoria realizzando una macchina il cui comportamente sia matematicamente prevedibile, rappresenta un notevole salto di qualità rispetto alle precedenti conoscenze empiriche, scientificamente inconsapevoli. In conclusione: alleniamoci a vedere F = ma in azione nelle macchine alla Archimede poi magari si vedrà la teoria della relatività in azione in dispositivi più moderni come il GPS.

---

1 Sulla meccanica e in generale sulla scienza degli antichi segnalo di L. Russo, *La Rivoluzione Dimenticata,* Feltrinelli (in edizione economica)



Una forza ignota mantiene M1 in quiete, si discuta il moto delle altre masse.

F e T sono la forza ignota e la tensione della fune.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = 0 & (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + T + F & (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = 0 & (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T & (4) \\ m_3 \ddot{x}_3 = 2T & (5) \\ m_3 \ddot{y}_3 = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 0 & \textit{Condizione assegnata} \\ 2\ddot{x}_3 + \ddot{y}_2 = 0 & \textit{filo inestensibile} \end{cases}$$

Il fattore 2 che compare nella condizione di inestensibilità del filo nasce dal fatto che la carrucola collegata alla massa M3 è una carrucola mobile.
Moltiplichiamo la (5) per 2, sostituiamo la condizione di inestensibilità e quindi confrontiamo con la (4). Si ricava la tensione della fune

$$T = \frac{m_2 m_3}{m_3 + 4m_2} g$$

Ora le altre quantità si ricavano facilmente.