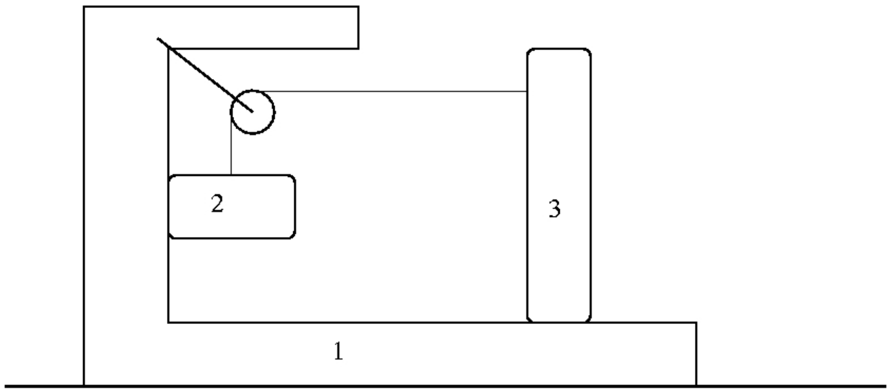


Note le masse si determini il moto del sistema in figura.

Chiamiamo N la reazione vincolare del piano di appoggio
Q la forza di contatto tra m1 e m3
F la forza di contatto tra m1 e m2
T la tensione della fune.

Equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = T - F & (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = N - T - Q - m_1 g & (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = F & (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T & (4) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -T & (5) \\ m_3 \ddot{y}_3 = Q - m_3 g & (6) \end{cases}$$

vincoli

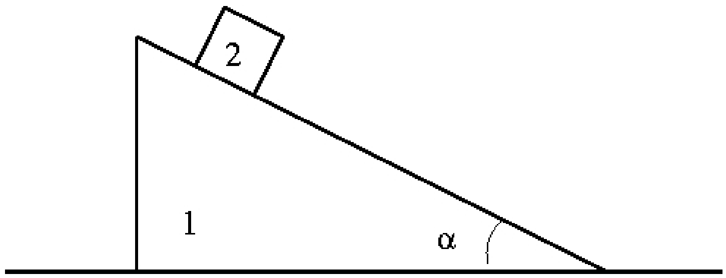
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 & \textit{contatto}\ m_1 m_2 \\ \ddot{y}_1 = \ddot{y}_3 & \textit{contatto}\ m_1 m_3 \\ \ddot{y}_1 = 0 & \textit{Piano di appoggio} \\ -\ddot{y}_2 + \ddot{x}_3 - \ddot{x}_1 = 0 & \textit{filo inestensibile} \end{cases}$$

Conviene “quasi sempre” elimininare le forze di contatto orizzontali, in questo caso combinando le equazioni (1) e (3) con la condizione di contatto tra M1 e M2. Riconosciamo che T, x1, y2, x3 formano il sotto-sistema. Notare che la (4) e la (5) sono state moltiplicate per masse opportune!!!

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = T \\ m_2 m_3 \ddot{y}_2 = -m_2 m_3 g + m_3 T \\ m_2 m_3 \ddot{x}_3 = -m_2 T \\ -\ddot{y}_2 + \ddot{x}_3 - \ddot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

La conclusione si lascia al lettore!

Piano inclinato



Il corpo 2 è libero di scorrere sul piano inclinato 1. Il corpo 1 può muoversi orizzontalmente sul piano di appoggio. Note le masse dei due corpi e l'angolo determinare il moto dei due corpi e la traiettoria seguita dal corpo 2.

Indichiamo con Q la forza di contatto tra 1 e 2 diretta ortogonalmente alla superficie di separazione e con N la reazione vincolare determinata dal piano d'appoggio. Le equazioni del moto formano il sistema:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -Q \sin\alpha & (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = N - Q\cos\alpha - m_2 g & (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = Q \sin\alpha & (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = Q\cos\alpha - m_2 g & (4) \end{cases}$$

Le accelerazioni devono soddisfare il vincolo che i due corpi restino in contatto durante il moto. Scegliamo come punto rappresentativo del corpo M1 il vertice dell'angolo indicato in figura, si ha che un punto qualunque (x2,y2) del lato di M2 in contatto con M1 deve appartenere alla retta di equazione $y = -\tan\alpha(x - x_1)$. Sostituendo (x2,y2) nell'equazione, derivando due volte e tenendo conto che y1 = 0 si ha il vincolo:

$$\boldsymbol{\ddot{y}_2 = \tan\alpha(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}$$

Moltiplichiamo la (1) per m2, la (3) per m1 e sommiamo a membro a membro. Inoltre definiamo la massa ridotta come

$$\frac{1}{\mu} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Includendo il vincolo si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} \mu(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = Q \sin\alpha \\ m_2 \ddot{y}_2 = Q\cos\alpha - m_2 g \\ \ddot{y}_2 = \tan\alpha(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \end{cases}$$

Conviene eliminare l'accelerazione y2 e determinare la forza di contatto

$$Q = \frac{m_1 m_2 g \cos\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha}$$

Infine si trovano le accelerazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{m_2 g \cos\alpha \sin\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha} \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{m_1 g \cos\alpha \sin^2\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha} \\ \ddot{y}_2 = -\dfrac{(m_1 + m_2) g \sin^2\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha} \end{cases}$$

L'equazione della traiettoria del corpo 2 si ottiene integrando le ultime due equazioni ed eliminando il tempo (vedi esercizio del moto del proiettile). Le condizioni iniziali si possono scegliere in modo che il corpo 2 sia inizialmente in quiete: $x_2(0) = x_0$, $y_2(0) = y_0$, $\ddot{x}_2(0) = 0$, $\ddot{y}_2(0) = 0$.
Si ottiene la retta di equazione:

$$y - y_0 = -(1 + \frac{m_2}{m_1}) \tan\alpha (x - x_0)$$

L'angolo che la retta forma con l'asse delle X è un più grande dell'angolo formato dal piano inclinato.

Provate a considerare il caso in cui la massa del piano inclinato sia molto più grande della massa del corpo 2, ovvero M1>> M2, cosa succede alle accelerazioni e alla traiettoria?