

Note le masse si determini il moto del sistema in figura.

Chiamiamo N la reazione vincolare del piano di appoggio

Q la forza di contatto tra m_1 e m_3

F la forza di contatto tra m_1 e m_2

T la tensione della fune.

Equazioni del moto

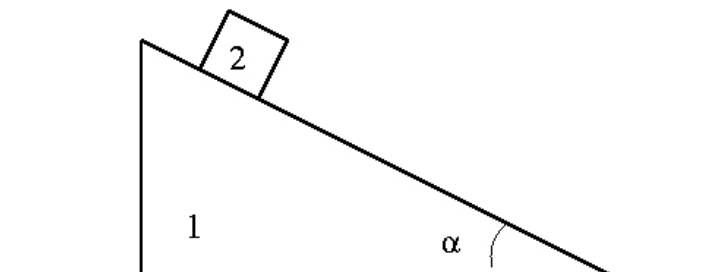
$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = T - F \quad (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = N - T - Q - m_1 g \quad (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = F \quad (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T \quad (4) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -T \quad (5) \\ m_3 \ddot{y}_3 = Q - m_3 g \quad (6) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_1 = \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_1 = 0 \\ -\ddot{y}_2 + \ddot{x}_3 - \ddot{x}_1 = 0 \end{array} \right.$	<p>vincoli</p> <p><i>contatto $m_1 m_2$</i></p> <p><i>contatto $m_1 m_3$</i></p> <p><i>Piano di appoggio</i></p> <p><i>filo inestensibile</i></p>
---	--	---

Conviene “quasi sempre” eliminare le forze di contatto orizzontali, in questo caso combinando le equazioni (1) e (3) con la condizione di contatto tra M_1 e M_2 . Riconosciamo che T, x_1, y_2, x_3 formano il sotto-sistema. Notare che la (4) e la (5) sono state moltiplicate per masse opportune!!!

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = T \\ m_2 m_3 \ddot{y}_2 = -m_2 m_3 g + m_3 T \\ m_2 m_3 \ddot{x}_3 = -m_2 T \\ -\ddot{y}_2 + \ddot{x}_3 - \ddot{x}_1 = 0 \end{array} \right.$$

La conclusione si lascia al lettore!

Piano inclinato



Il corpo 2 è libero di scorrere sul piano inclinato 1. Il corpo 1 può muoversi orizzontalmente sul piano di appoggio. Note le masse dei due corpi e l'angolo determinare il moto dei due corpi e la traiettoria seguita dal corpo 2.

Indichiamo con Q la forza di contatto tra 1 e 2 diretta ortogonalmente alla superficie di separazione e con N la reazione vincolare determinata dal piano d'appoggio. Le equazioni del moto formano il sistema:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -Q \sin \alpha & (1) \\ m_1 \ddot{y}_1 = N - Q \cos \alpha - m_2 g & (2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = Q \sin \alpha & (3) \\ m_2 \ddot{y}_2 = Q \cos \alpha - m_2 g & (4) \end{cases}$$

Le accelerazioni devono soddisfare il vincolo che i due corpi restino in contatto durante il moto.

Scegliamo come punto rappresentativo del corpo M1 il vertice dell'angolo indicato in figura, si ha che un punto qualunque (x_2, y_2) del lato di M2 in contatto con M1 deve appartenere alla retta di equazione

$y = -\tan \alpha (x - x_1)$. Sostituendo (x_2, y_2) nell'equazione, derivando due volte e tenendo conto che $y_1 = 0$ si ha il vincolo:

$$\ddot{y}_2 = \tan \alpha (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)$$

Moltiplichiamo la (1) per m_2 , la (3) per m_1 e sommiamo a membro a membro. Inoltre definiamo la massa ridotta come

$$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Includendo il vincolo si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} \mu(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = Q \sin \alpha \\ m_2 \ddot{y}_2 = Q \cos \alpha - m_2 g \\ \ddot{y}_2 = \tan \alpha (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \end{cases}$$

Conviene eliminare l'accelerazione y_2 e determinare la forza di contatto

$$Q = \frac{m_1 m_2 g \cos \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}$$

Infine si trovano le accelerazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{m_2 g \cos \alpha \sin \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} \\ \ddot{x}_2 = \frac{m_1 g \cos \alpha \sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} \\ \ddot{y}_2 = -\frac{(m_1 + m_2) g \sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

L'equazione della traiettoria del corpo 2 si ottiene integrando le ultime due equazioni ed eliminando il tempo (vedi esercizio del moto del proiettile). Le condizioni iniziali si possono scegliere in modo che il corpo 2 sia inizialmente in quiete: $x_2(0) = x_0$, $y_2(0) = y_0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 0$.
Si ottiene la retta di equazione:

$$y - y_0 = -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \tan \alpha (x - x_0)$$

L'angolo che la retta forma con l'asse delle X è un più grande dell'angolo formato dal piano inclinato.

Provate a considerare il caso in cui la massa del piano inclinato sia molto più grande della massa del corpo 2, ovvero $M_1 \gg M_2$, cosa succede alle accelerazioni e alla traiettoria?