Esercizi di MQII

Problema 1

L'atomo di deuterio è composto di un elettrone e un nucleo che è un deutone, di massa due volte quella del protone, carica +1 e con un quadrupolo elettrico non nullo. Dovuto al quadupolo elettrico del nucleo, il potenziale per l'elettrone contiene una piccola parte di potenziale quadrupolo oltre al termine Coulombiano:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r} + c\,\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \tag{1}$$

dove c è una costante molto piccola.

i) Dimostrare che non ci sono correzioni per l'energia dello stato fondamentale in teoria delle perturbazioni, al primo ordine in $H' = c\,\frac{r^2-3z^2}{r^5}$.

ii) Elencare gli elementi di matrice non nulli di H' tra gli stati di $n = 3$.

iii) Determinare le correzioni di energia ai livelli con $n = 3$, al primo ordine in H'. In quanti sottolivelli si divide il livello $n = 3$?

Potete usare il formulario.

Formulario: Alcune integrali con funzioni radiali dell'atomo di idrogeno

$$\int_0^\infty dr\, r^{-1} R_{3,\ell}(r) R_{3,\ell'}(r) = C_{\ell,\ell'}\, r_B^{-3}, \tag{2}$$

$r_B \equiv \hbar^2/me^2$ è il raggio di Bohr, e il coefficiente $C_{\ell,\ell'}$ è dato da:

ℓ, ℓ'	$2,2$	$2,1$	$2,0$	$1,1$	$1,0$
$C_{\ell,\ell'}$	$\frac{1}{405}$	$\frac{1}{243\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{4\sqrt{2}}{243}$

Problema 2

Si considerino gli elementi di matrice di un operatore

$$V = e f(r)\, y\, z \tag{3}$$

tra gli stati di secondo livello di eccitazione $|n,\ell,m\rangle = |3,\ell,m\rangle$, dell'atomo di idrogeno.

i) Esprimere V come una combinazione lineari di tensori sferici;

ii) Dire quali tra

$$R_1 = \frac{\langle 3,2,-1|V|3,1,0\rangle}{\langle 3,2,-1|V|3,2,0\rangle}, \quad R_2 = \frac{\langle 3,1,-1|V|3,1,0\rangle}{\langle 3,1,0|V|3,1,1\rangle}, \quad R_3 = \frac{\langle 3,2,1|V|3,2,0\rangle}{\langle 3,1,0|V|3,1,-1\rangle} \tag{4}$$

non si possono ottenere senza ulteriore informazione su $f(r)$;

iii) Calcolare il rapporto

$$\frac{\langle 3,2,2|V|3,2,1\rangle}{\langle 3,2,-1|V|3,2,0\rangle}. \tag{5}$$

Problema 3

Un numero grande di atomi di idrogeno, tutti nello stato fondamentale a $t = -\infty$, sono posti in un campo elettrico debole, dipendente dal tempo:

$$\mathbf{E} = (0, E(t), 0), \qquad E(t) = \frac{\epsilon}{R^2 + v^2 t^2} \tag{6}$$

(R, v, ϵ reali).

i) Scrivere il potenziale di perturbazione e dire in quali stati (n, ℓ, m) gli atomi si possono trovare a $t = \infty$, secondo la teoria delle perturbazioni al primo ordine;

ii) Calcolare la percentuale di atomi in uno stato di $n = 2$ (il primo livello di eccitazione) a $t = \infty$. Commentare sul limite adiabatico.

Trascurate il decadimento spontaneo di stati eccitati per ambedue le domande. Se è necessario, potete usare la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + A^2} = \frac{\pi}{A} e^{-\omega A}, \qquad (\omega > 0, \; A > 0) \tag{7}$$

(che si trova facilmente usando il teorema del residuo).

Problema 4

Un oscillatore armonico unidimensionale con frequenza angolare ω e di massa m nello stato fondamentale a $t = -\infty$, è sottoposto ad una perturbazione

$$V(x,t) = A\,\delta(x - c\,t), \tag{8}$$

dove A e c sono costanti.

(i) Trovare la probablilità che il sistema si trova nel primo stato di eccitazione a $t = \infty$, nella teoria delle perturbazioni al primo ordine;

(ii) Discutere il limite adiabatico e il limite di perturbazione istantanea.

Problema 5

Un sistemi a due livelli (e.g. stati di spin $\frac{1}{2}$ in un campo magnetico statico), $E_1 < E_2$, è perturbato dal potenziale esterno debole variabile col tempo,

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\, e^{i\omega t} \\ \gamma\, e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

(γ reale), a partire dal $t = 0$.

(i) Trovare $c_1(t)$ e $c_2(t)$, dove

$$\psi(t) = c_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, |\uparrow\rangle + c_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar} |\downarrow\rangle, \tag{10}$$

risolvendo l'equazione di Schrödinger t-dipendente in maniera esatta, e assumendo $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$. Determinare le probablilità che lo spin sia nello stato "up" o " down" ad un generico istante t.

Suggerimento: per esempio, porre

$$c_1(t) = e^{i\,(\omega-\omega_{12})\,t/2}\, \tilde{c}_1(t), \qquad c_2(t) = e^{-i\,(\omega-\omega_{12})\,t/2}\, \tilde{c}_2(t)$$

($\omega_{12} \equiv (E_2 - E_1)/\hbar$) e diagonalizzare l'Hamiltoniana nella nuova base.

(ii) Discutere il limite di γ piccolo col metodo perturbativo.

Il risultato del punto (i) è la formula di Rabi.

Problema 6

(i) Trovare tutti i possibili termini spettrali (L, S) per i tre elettoni equivalenti nello strato $(n, 1)$.

(ii) Applicare la regola di Hund e dire qual'è il termine (L, S) con l'energia più bassa.

(iii) Verificare, nel caso di elementi con tre elettroni equivalenti di valenza in onda p (dire quali), che i numeri quantici globali dello stato fondamentale dell'atomo corrisponde infatti a (L, S) trovato al punto (ii).

(iv) Ripetere l'analisi per gli elementi che hanno due elementi di valenza in uno strato con $\ell = 1$.

Problema 7

I primi livelli del Be ($Z = 4$) sono, trascurando la struttura fine,

$$(2s)^2\ {}^1S, \quad 2s\,2p\ {}^3P, \quad 2s\,2p\ {}^1P, \quad 2s\,3s\ {}^3S, \quad 2s\,3s\ {}^1S, \quad (2p)^2\ {}^1D, \quad 2s\,3p\ {}^3P, \quad (2p)^2\ {}^3P, \tag{11}$$

in ordine crescente dell'energia, e lo strato chiuso $(1s)^2$ è inteso.

(i) I vapori di Be, eccitati al livello $(2p)^2\ {}^3P$, emettono luce. Dire quante righe spettrali si osserveranno e a quali transizioni (di dipolo elettrico) esse corrispondono. (Al fine di rispondere a questa domanda la struttura fine va tenuto conto.)

(ii) Dire quali fra i livelli eccitati elencati sono stabili rispetto a transizioni di dipolo elettrico.

Soluzione

Problema 1

i) H' è un tensore sferico T_0^2 di rango 2, : la correzione al primo ordine

$$\langle 1\,0\,0|H'|1\,0\,0\rangle \tag{12}$$

si annulla per il teorema di Wigner-Eckart.

ii) A $n = 3$ ci sono stati con $\ell = 2, 1, 0$. Usando il teorema di Wigner-Eckart e la conservazione di parità, si ha che gli elementi a priori non nulli sono:

$$\langle 3\,2\,m|H'|3\,2\,m\rangle, \qquad \langle 3\,0\,0|H'|3\,2\,0\rangle, \qquad \langle 3\,2\,0|H'|3\,0\,0\rangle, \qquad \langle 3\,1\,m|H'|3\,1\,m\rangle; \tag{13}$$

in verità, gli elementi nondiagonali si annullano perché l'integrale radiale rilevante è nullo.

iii) Visto che

$$\int \frac{dr}{r} R_{3,2} R_{3,0} = 0, \tag{14}$$

H' è diagonale in questa base, perciò:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,\pm 2)} &= \frac{c}{r_B^3} \int \frac{dr}{r} R_{3,2}^2 \int Y_{2,2}^* (1 - 3\cos^2\theta) Y_{2,2} \\
&= \frac{c}{r_B^3} \cdot \frac{1}{405} \cdot \frac{15}{32\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^1 dz (1 - 3z^2)(1 - z^2)^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3} \cdot \frac{1}{405} \cdot \frac{15}{32\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{32}{105} = \frac{4\,c}{2835\, r_B^3}.
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,\pm 1)} &= \frac{c}{r_B^3} \int \frac{dr}{r} R_{3,2}^2 \int Y_{2,1}^* (1 - 3\cos^2\theta) Y_{2,1} \\
&= \frac{c}{r_B^3} \cdot \frac{1}{405} \cdot \frac{15}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^1 dz (1 - 3z^2)(1 - z^2) z^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3} \cdot \frac{1}{405} \cdot \frac{15}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{105}\right) = -\frac{2\,c}{2835\, r_B^3}.
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,0)} &= \frac{c}{r_B^3} \int \frac{dr}{r} R_{3,2}^2 \int Y_{2,0}^* (1 - 3\cos^2\theta) Y_{2,0} \\
&= \frac{c}{r_B^3} \cdot \frac{1}{405} \cdot \frac{5}{16\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^1 dz (1 - 3z^2)^3 \\
&= \frac{c}{r_B^3} \cdot \frac{1}{405} \cdot \frac{5}{16\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left(-\frac{16}{35}\right) = -\frac{4c}{2835\, r_B^3}.
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,1\,\pm1)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,1}^2 \int Y_{1,1}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{1,1} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2) \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{4}{15} = \frac{2c}{405\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,1\,0)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,1}^2 \int Y_{1,0}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{1,0} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)z^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{4c}{405\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Lo stato $|3,0,0\rangle$ rimane imperturbato. Il livello $n=3$ si divide in sei sottolivelli.

Problema 2

i)

$$V = T_1^2 + T_{-1}^2 \tag{20}$$

ii) R_3 non può essere determinato senza ulterioi informazioni. $R_1 = 0$ dovuto alla parità; R_2 si determina con il teorema di Wigner-Eckart.

iii)

$$\frac{\langle 3,2,2|V|3,2,1\rangle}{\langle 3,2,-1|V|3,2,0\rangle} = \frac{\langle 2,2|2,1;2,1\rangle}{\langle 2,-1|2,-1;2,0\rangle} = \frac{-\sqrt{3/7}}{-\sqrt{1/14}} = \sqrt{6}. \tag{21}$$

Problema 3

i) La probablità per transizione $i \to f$ è data da

$$\mathcal{P}_{fi} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int dt\, e^{i\omega_{fi}\,t}\langle f|H'|i\rangle\right|^2; \tag{22}$$

il potenziale è:

$$H' = eyE(t), \tag{23}$$

ed è un tensore sferico di rango 1, di forma

$$T_{1,1} + T_{1,-1}. \tag{24}$$

Gli stati finale ha perciò $(n,\ell,m) = (n,1,\pm1)$ con $n = 1,2,\ldots$, poiché

$$\int dr\, r^3 R_{n,1}R_{1,0} \neq 0, \qquad \forall n. \tag{25}$$

(*N.B.* Per $\ell \neq \ell'$, $R_{n,\ell}$ e $R_{n,\ell'}$ non obediscono nessuna relazione di ortogonalità.)

ii)

$$\mathcal{P}_{fi} = \frac{e^2\epsilon^2}{\hbar^2} \, |\langle 2\,1\, \pm 1|\, y\,|1\,0\,0\rangle|^2 \left| \int dt \frac{e^{i\omega_{fi}\,t}}{R^2+v^2t^2} \right|^2 \tag{26}$$

$$\langle 2,1,\pm 1|\, y\,|1,0,0\rangle = \int dr\, r^2\, R_{2,1}\, r\, R_{1,0} \int d(\cos\theta) d\phi\, [\pm i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, \sin\theta\, e^{\mp i\phi}]\, \sin\theta \sin\phi\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$= \pm i\frac{128}{81}\sqrt{\frac{2}{3}}\, r_B \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}(\mp i\pi)\frac{4}{3} = \frac{2^7}{3^5}\, r_B; \tag{27}$$

$$\int dt \frac{e^{i\omega_{fi}\,t}}{R^2+v^2t^2} = \frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{i\omega_{fi}\,t}}{\frac{R^2}{v^2}+t^2} = \frac{\pi}{vR} e^{-\omega_{fi}R/v} \tag{28}$$

$$P_{|1,0,0\rangle\to|2,1,1\rangle} = P_{|1,0,0\rangle\to|2,1,-1\rangle} = \frac{e^2\epsilon^2}{\hbar^2}\frac{2^{14}}{3^{10}}\, r_B^2 \frac{\pi^2}{v^2R^2} e^{-2\omega_{fi}R/v}, \qquad \omega_{fi} = \frac{3e^2}{8\,\hbar\, r_B}. \tag{29}$$

La percentuale degli atomi in uno stato $n=2$ è

$$100 \cdot \frac{e^2\epsilon^2}{\hbar^2}\frac{2^{15}}{3^{10}}\, r_B^2 \frac{\pi^2}{v^2R^2} e^{-2\omega_{fi}R/v} \simeq 55.5 \frac{e^2\epsilon^2}{\hbar^2}\, r_B^2 \frac{\pi^2}{v^2R^2} e^{-2\omega_{fi}R/v}. \tag{30}$$

N.B. Il fattore 2 sta nella probabilità. Non si sommano le ampiezze con stati finali diversi.

Nel limite adiabatico,

$$\frac{e^2 R}{\hbar\, v\, r_B} \ll 1, \tag{31}$$

i.e., limite di variazione lenta, la probabilità di transizione è soppressa esponenzialmente.

Problema 4

La probablità di transizione $i \to f$ è data dall'espressione

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\,\omega_{fi} t}\, \langle f|V|i\rangle \right|^2 . \tag{32}$$

In questo problema,

$$\omega_{fi} = \omega; \tag{33}$$

$$\langle f|V|i\rangle = c_0\, c_1 \int dx\, e^{-\alpha^2\, x^2} 2\alpha\, x\, A\, \delta(x - c\,t) = 2\, c\, \alpha\, c_0 c_1 A\, t\, e^{-\alpha^2 c^2 t^2}, \tag{34}$$

dove $c_0 = (\frac{\alpha}{\pi^{1/2}})^{1/2}$, $c_1 = (\frac{\alpha}{2\,\pi^{1/2}})^{1/2}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\,\omega_{fi} t}\, \langle f|V|i\rangle = 2\, c\, \alpha\, c_0 c_1 A \int dt\, t\, e^{-\alpha^2 c^2 (t - \frac{i\omega}{2\alpha^2 c^2})^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}}$$

$$= 2\, c\, \alpha\, c_0 c_1 A \frac{i\omega}{2\alpha^2 c^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha c}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}} = \frac{i\sqrt{\pi}\, c_0 c_1 \omega A}{\alpha^2 c^2}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}}. \tag{35}$$

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \frac{i\sqrt{\pi}\, c_0 c_1 \omega A}{\alpha^2 c^2}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2 c^2}} \right|^2 = \frac{A^2 \omega}{2\, m\, \hbar\, c^4}\, e^{-\frac{\omega \hbar}{2 m c^2}}. \tag{36}$$

Sia nel limite adiabatico $c \to 0$ (i.e., nel limte in cui V_{fi} varia lentamente) che nel limite di perturbazione istantanea $c \to \infty$, la probablità di transizione si annulla. Nell'ultimo caso, questo risultato può essere compreso senza uso della teoria delle perturbazione, visto che la funzione d'onda non ha tempo per evolvere, mentre il sistema a $t \to -\infty$ e quello a $t \to \infty$ sono identici.

Problema 5

Trovate la soluzione in molti libri di testo di MQ, per es. in Cohen-Tannoudji et. al., Complement C_{XIII}; J.J. Sakurai, Problem 30 del Cap. 5.

$$P_1 = 1 - P_2; \quad P_2 = \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega - \omega_{21})^2/4} \sin^2 \left[\left(\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right)^{1/2} t \right] \tag{37}$$

Solo per $\omega = \omega_{21}$, condizione di risonanza, e in questo caso per qualsiasi valore non nulllo di γ, si ha $P_2 = 1$ (inversione di spin) per certi valori di t. Questo tipo di sistema ha molte applicazioni importanti (per es. tecnica di Risonanza Magnetica)

Problema 6

(i) $S = \frac{3}{2}$ o $\frac{1}{2}$, mentre il momento angolare orbitale totale può prendere i valori $L = 0, 1, 2, 3$. $L = 3$ (la funzione d'onda orbitale totalmente simmetrica) è esclusa dall'impossibilità di costruire una funzioine d'onda di spin totalmente antisimmetrica.

- $S = \frac{3}{2}$ (spin totalmente simmetrica). La funzione d'onda orbitale deve essere totalmente antisimmetrica. Il determinante di Slater con $p_1 = \psi_1^{\uparrow}$, $p_2 = \psi_0^{\uparrow}$, $p_3 = \psi_{-1}^{\uparrow}$ corrisponde ad uno stato di $L = 0$. $\therefore$ $(L, S) = (0, \frac{3}{2})$ oppure

$$^4S_{3/2}.$$

Ci sono 4 stati.

- Per $S = \frac{1}{2}$ lo stato di spin è di simmetria mista:

 , (38)

anche la funzione d'onda orbitale è dello stesso tipo. Per questi ultimi, la tabella di Young non determina univocamente il valore di L, ma si possono facilmente costruire gli stati di L definiti. Per es., lo stato pù alto del gruppo $(L, S) = (2, \frac{1}{2})$, i.e., con $L_z = 2$; $S_z = \frac{1}{2}$, è costruito col determinante di Slater con $p_1 = \psi_1^{\uparrow}$, $p_2 = \psi_0^{\uparrow}$, $p_3 = \psi_1^{\downarrow}$,

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2,\frac{1}{2})}_{L_z=2;\, S_z=\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{6}} [\, \psi_1^{\downarrow}(1) \, (\psi_1^{\uparrow}(2)\psi_0^{\uparrow}(3) - \psi_0^{\uparrow}(2)\psi_1^{\uparrow}(3)\,) \\
&- \psi_1^{\downarrow}(2) \, (\psi_1^{\uparrow}(1)\psi_0^{\uparrow}(3) - \psi_0^{\uparrow}(1)\psi_1^{\uparrow}(3)\,) \\
&+ \psi_1^{\downarrow}(3) \, (\psi_1^{\uparrow}(1)\psi_0^{\uparrow}(2) - \psi_0^{\uparrow}(1)\psi_1^{\uparrow}(2)\,)\,]
\end{aligned} \tag{39}$$

Lo strato $(L, S) = (2, \frac{1}{2})$ può dare luogo a due termini spettrali

$$^2D_{5/2}, \qquad ^2D_{3/2}.$$

Ci sono 10 stati.

- $(L,S)=(1,\frac{1}{2})$ Gli stati di questo gruppo si possono ottenere costruendo $\Psi^{(1,\frac{1}{2})}_{L_z=1;\,S_z=\frac{1}{2}}$ di modo che sia ortogonale a

$$L_-\Psi^{(2,\frac{1}{2})}_{L_z=2;\,S_z=\frac{1}{2}} \propto \Psi^{(2,\frac{1}{2})}_{L_z=1;\,S_z=\frac{1}{2}} \tag{40}$$

I 6 stati di $(L,S)=(1,\frac{1}{2})$ danno luogo ai due termini spettrali

$$^2P_{3/2}, \qquad ^2P_{1/2}.$$

- $S=\frac{1}{2}$, $L=0$ può essere escluso, poiché $L=0$ corrisponde alla tabella di Young

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \tag{41}$$

(una funzione d'onda con una sola componente) mentre quello di spin è del tipo (38): non è possibile costruire la funzione d'onda totalmente antisimmetrica.

In tutto, questi $4+10+6=20$ stati esauriscono tutti i $_6C_3$ modi per scegliere tre stati diversi da

$$\psi_1^{\uparrow}, \quad \psi_1^{\downarrow}, \quad \psi_0^{\uparrow}, \quad \psi_0^{\downarrow}, \quad \psi_{-1}^{\uparrow}, \quad \psi_{-1}^{\downarrow}. \tag{42}$$

(ii) Lo strato di maggiore S è quello di $(L,S)=(0,\frac{3}{2})$.

(iii) Infatti gli elementi con tre elettroni equivalenti nella valenza, con la configurazione elettronica $\ldots np^3$,

$$N, \quad P, \quad As, \quad Sb \quad Bi, \tag{43}$$

hanno tutti lo stato fondamentale

$$^4S_{3/2}. \tag{44}$$

(iv) Un'analoga considerazione porta a concludere che lo stato fondamentale degli elementi con due elettroni equivalenti nella valenza con $\ell=1$,è in uno stato $(L,S)=(1,1)$. Essendo questi atomi "normali" (lo strato occupato meno della metà), lo stato fondamentale ha il minimo possibile valore di J, i.e.,

$$^3P_0, \tag{45}$$

come effettivamente avviene nelgi elementi

$$C, \quad Si, \quad Ge, \quad Sn, \quad Pb \tag{46}$$

Problema 7

(i) L'unica transizione di dipolo possibile è

$$(2p)^2\ {}^3P \to 2s\,2p\ {}^3P. \tag{47}$$

Altre transizioni o coinvolgono più di un elettrone o non soddisfano le regole di selezione. I due livelli hanno la struttura fine corrispondente a $J=0,1,2$, con l'energia,

$$E_2+\Delta_2, \quad E_2-\Delta_2, \quad E_2-2\Delta_2, \tag{48}$$

e

$$E_1 + \Delta_1, \quad E_1 - \Delta_1, \quad E_1 - 2\Delta_1, \tag{49}$$

con $\Delta_1 \neq \Delta_2$ (U_{eff} perciò A dipende dallo strato.) Si osservano perciò sei righe, con frequenze,

$$\begin{aligned} h\nu &= E_2 - E_1 + \Delta_2 - \Delta_1, \quad E_2 - E_1 + \Delta_2 + \Delta_1, \quad E_2 - E_1 - \Delta_2 - \Delta_1, \\ &= E_2 - E_1 - \Delta_2 + \Delta_1, \quad E_2 - E_1 - \Delta_2 + 2\Delta_1, \quad E_2 - E_1 - 2\Delta_2 + \Delta_1. \end{aligned} \tag{50}$$

Vedi Fig.

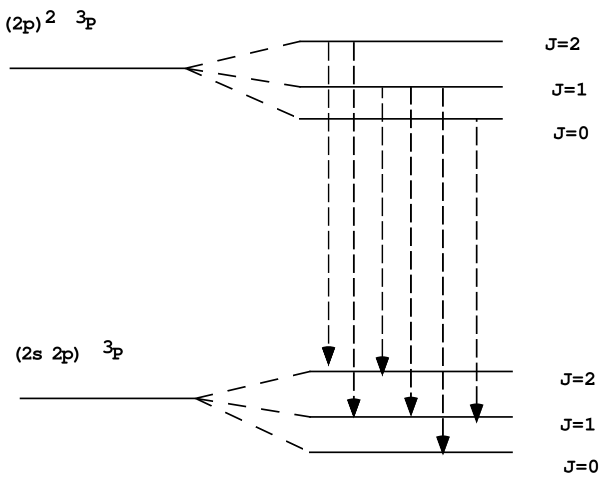

Figure 1:

(ii) Il primo livello eccitato $2s\,2p\ {}^3P$ (più naturalmente lo stato fondamentale $(2s)^2\ {}^1S$.)