

Problemi supplementari

2 Problemi per Capitolo 2

2.1 Sistema a 3 stati

Un sistema “a tre stati” è descritto dall’Hamiltoniana

$$H = H_0 + H' = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (i) Determinare gli autovalori dell’Hamiltoniana totale, $H_0 + H'$, e gli autostati corrispondenti allo stato fondamentale ($|\tilde{1}\rangle$), al primo ($|\tilde{2}\rangle$) e al secondo stato di eccitazione

($|\tilde{3}\rangle$), in termini di $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Suggerimento: Diagonalizzare l’operatore H' .)

- (ii) Come si verifica facilmente, l’Hamiltoniana (1) commuta con l’operatore

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi^2 = \mathbf{1}. \quad (2)$$

Discutere, in concomitanza col risultato del punto i), le conseguenze di questo fatto.

- (iii) Esprimere gli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ in termini dei tre autostati dell’energia.

- (iv) Il sistema è nello stato $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, all’istante $t = 0$. Determinare la funzione d’onda all’istante t , $|\psi(t)\rangle$, in termini degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$. Determinare la probabilità $P_2(t)$ che all’istante t la particella si trovi nello stato $|2\rangle$ ¹ e fare uno schizzo di $P_2(t)$ come funzione di t .

2.2 Sistema a 2 stati

Si consideri un sistema a due stati descritto dall’Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\eta \\ -\eta & E_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- (i) Rispondere se η può essere complesso (*i.e.*, $\text{Im}(\eta) \neq 0$);
(ii) Determinare gli autovalori e gli autostati di H ;
(iii) All’istante $t = 0$, il sistema si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Si determinino le probabilità $P_1(t)$, $P_2(t)$, che all’istante t il sistema si trovi o nello stato $|1\rangle$ o nello stato $|2\rangle$. Fare uno schizzo di $P_1(t)$ e $P_2(t)$.

¹Si supponga che sia possibile fare una misura, corrispondente all’operatore $O_2 \equiv |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tale misura (filtro) darà o 1 o 0 come risultato. La domanda può essere riformulata allora in maniera più precisa: qual’è la probabilità che la misura di O_2 eseguita all’istante t , dia il risultato 1?

2.3 Sistema a 3 stati, autostati e autovalori

Si consideri un sistema “a tre stati”. Nella base di stati in cui l’Hamiltoniana è diagonale (e con i livelli non degeneri), due operatori Hermitiani A e B sono dati da (a, b reali e positivi)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ia \\ 0 & 0 & 0 \\ ia & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- i) Determinare gli autovalori e gli autostati dell’operatore A .
- ii) Determinare gli autovalori e gli autostati dell’operatore B .
- iii) All’istante $t = 0$, la misura di A ha dato come risultato l’autovalore massimo di A . Qual’è la probabilità che la misura di B , eseguita immediatamente dopo la misura di A , dia l’autovalore massimo di B ?
- iv) Se la misura di B al punto iii) fosse fatta all’istante t generico ($t > 0$), la probabilità di trovare l’autovalore massimo di B sarebbe uguale al caso di iii)? Rispondere Sì o No, giustificando la risposta.

3 Problemi per Capitolo 3

3.1 Particella fra pareti

Una particella di massa m è confinata in una buca

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a, \\ \infty & x < 0, x > a. \end{cases} \quad (6)$$

e si trova nello stato fondamentale.

- (i) Qual’è la pressione che la particella esercita sul muro?
- (ii) A $t = 0$ il muro a destra della buca (a $x = a$) si sposta all’improvviso a $x = 2a$. Calcolare le probabilità che la particella si trovi in vari stati stazionari (della nuova buca).
- (iii) Se invece il muro viene adiabaticamente spostato da a fino a $2a$, qual’è lo stato finale? Calcolare il lavoro ricevuto (o dato) dal sistema legato.

3.2 Potenziale a delta

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} -g \delta(x) & x < a, \\ \infty & x \geq a, \end{cases} \quad (g > 0). \quad (7)$$

(Fig. 1). Si vogliono studiare le proprietà di un eventuale stato legato con energia negativa.

- (i) Trovare l’equazione che implicitamente determina l’energia di uno stato legato con $E < 0$. Dalla condizione di esistenza per una soluzione di questa equazione, trovare la condizione (sui parametri, m, g, a) affinché il sistema abbia uno stato legato di energia negativa;
- (ii) Discutere il limite $a \rightarrow \infty$;
- (iii) Dire se esistono degenerazioni per gli autovalori dell’energia nello spettro continuo ($E \geq 0$).

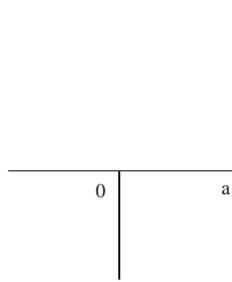


Figura 1:

3.3 Potenziale a delta e pareti

Consideriamo il moto di una particella in un potenziale unidimensionale (Fig. 2):

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ g \delta(x) & -a \leq x \leq 2a \\ \infty & x > 2a. \end{cases} \quad (8)$$

Si vogliono studiare i primi due livelli energetici. Indichiamo con $\psi_-(x)$ e $\psi_+(x)$ la funzione d'onda nelle regioni $x < 0$ e $x > 0$, rispettivamente. Imponendo l'annullamento della funzione d'onda a $x = -a$ e a $x = 2a$, $\psi_-(x)$ e $\psi_+(x)$ hanno la forma

$$\psi_-(x) = A \sin k(x + a), \quad \psi_+(x) = B \sin k(x - 2a), \quad (9)$$

dove $E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$.

- (i) Scrivere le equazioni che determinano i coefficienti A, B e il numero d'onda k (cioè E), imponendo la condizione di raccordo a $x = 0$.
- (ii) Dimostrare che una delle soluzioni della condizione di cui sopra dà i risultati esatti per un gruppo di livelli, quelli per i quali la funzione d'onda si annulla a $x = 0$.
- (iii) Esiste un'altro gruppo dei livelli, con la funzione d'onda che non si annulla a $x = 0$. Le energie di questi livelli non possono essere calcolate analiticamente. Facendo uso di un grafico, dimostrare che lo stato fondamentale del sistema (8) appartiene a questo gruppo. Calcolare l'energia di questo stato, nei limiti, $g \rightarrow 0$ e $g \rightarrow \infty$.
- (iv) Discutere più in generale qual'è la situazione fisica nei limiti $g \rightarrow 0$ e $g \rightarrow \infty$.

3.4 Potenziale con 2 delta

Una particella di massa m ed energia $E < 0$ si muove in una dimensione, nel potenziale

$$V(x) = f \delta(x) - g \delta(x - a), \quad g > 0. \quad (10)$$

- (i) Nel caso di una singola buca delta ($f = 0$) dire qual'è l'energia dello stato legato, e scrivere la funzione d'onda normalizzata.
- (ii) Nel caso $f \neq 0$, $g > 0$, la funzione d'onda di un autostato dell'energia, prende la seguente forma nelle tre regioni 1 ($x < 0$); 2 ($0 < x < a$); 3 ($x > a$)

$$A_i e^{\kappa x} + B_i e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \quad (11)$$

($i = 1, 2, 3$). Elencare tutte le relazioni o le condizioni per i coefficienti A_i e B_i .

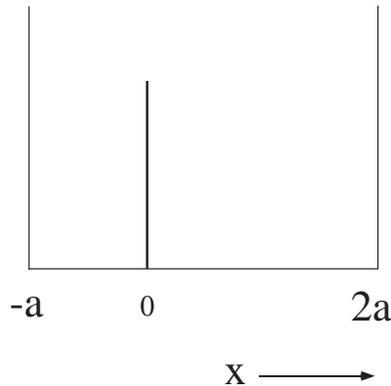


Figura 2:

- (iii) Trovare l'equazione che determina implicitamente il livello (o i livelli) di energia, come condizione di esistenza di una soluzione non banale di $\{A_i, B_i\}$ ²
- (iv) Analizzando tale equazione, dimostrare che per $|f|$ sufficientemente piccolo, esiste un unico stato legato. Determinare approssimativamente l'energia di questo stato.
(Opzionale) Dimostrare che, se $\frac{2mga}{\hbar^2} < 1$, per f positivo e sufficientemente grande non esiste alcun stato legato.

3.5 Buca asimmetrica

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale ($V_0 > 0$),

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, \\ 0 & 0 \leq x \leq a, \\ V_0 & x > a. \end{cases} \quad (12)$$

- (i) Qual'è la condizione per cui il sistema ha un solo stato legato?
- (ii) Determinare approssimativamente la funzione d'onda e l'energia dello stato fondamentale, nel limite di grande V_0 .
- (iii) Supponiamo che una particella sia confinata nella buca di cui al punto ii), e si trovi nello stato fondamentale. All'istante $t = 0$, il potenziale viene istantaneamente modificato ed acquista la forma

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, \\ 0 & 0 \leq x \leq a, \\ V_0 & a < x \leq 2a, \\ 0 & x > 2a. \end{cases} \quad (13)$$

Qual'è la probabilità per unità di tempo che la particella scappi dal legame, *i.e.* che essa appaia come particella libera al di fuori della barriera, $x > 2a$?

²Suggerimento: paragonare i risultati per A_2/B_2 ottenuti dalla condizione di continuità a $x = 0$ e a $x = a$.

4 Problemi per Capitolo 4

4.1 Oscillatore

Una particella di massa m si muove su una retta sotto l'azione di una forza elastica con costante di richiamo κ . Al tempo $t = 0$, mentre la particella si trova nello stato fondamentale, il centro di richiamo viene *istantaneamente* spostato di un tratto x_0 .

- (i) Calcolare il valore medio dell'energia al tempo $t > 0$ generico;
- (ii) Calcolare la probabilità che il sistema si trovi per $t > 0$ nello stato fondamentale e nel primo stato eccitato della nuova Hamiltoniana.
- (iii) Calcolare le eventuali discontinuità a $t = 0$, per i valori medi degli operatori di Heisenberg, x_H, p_H, \dot{x}_H e \dot{p}_H .

5 Problemi per Capitolo 5

5.1 Spin in campo magnetico

Una particella di spin S è sottoposta ad un campo magnetico esterno costante. L'Hamiltoniana è

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\beta S_z. \quad (14)$$

Supponiamo che all'istante $t = 0$ lo spin sia orientato nella direzione

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (15)$$

i.e.,

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} |0\rangle = S |0\rangle. \quad (16)$$

Si vuole studiare l'evoluzione temporale del sistema.

- (i) Calcolare i valori medi

$$\langle S_x \rangle, \quad \langle S_y \rangle, \quad \langle S_z \rangle, \quad (17)$$

all'istante $t = 0$.

Per il calcolo, conviene considerare un sistema equivalente, composto da $N = 2S$ particelle di spin $\frac{1}{2}$, tutti nella stessa direzione a $t = 0$, \mathbf{n} . E considerare l'operatore \mathbf{S} come

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i. \quad (18)$$

- (ii) [Opzionale] Quali sono le probabilità, se si facesse una misura di S_z a $t = 0$, di trovare i vari valori di S_z ? (Anche in questo problema, è utile considerare il sistema equivalente di cui al punto (i).)

- (iii) Si considerino gli operatori di Heisenberg,

$$S_x^{(H)}(t), \quad S_y^{(H)}(t), \quad S_z^{(H)}(t). \quad (19)$$

Scrivere le equazioni di Heisenberg e risolverle. Utilizzando questo risultato, determinare

$$\langle t|S_x|t\rangle, \quad \langle t|S_y|t\rangle, \quad \langle t|S_z|t\rangle, \quad (20)$$

dove $|t\rangle$ è la funzione d'onda all'istante t generico; S_x , etc. sono operatori di Schrödinger. Dire qual'è il valore minimo di t , per il quale

$$\langle 0|S_x|0\rangle \quad (21)$$

riprende il valore iniziale.

5.2 Oscillatore in campo magnetico

Un oscillatore tridimensionale di massa m , carica elettrica q e di spin $\frac{1}{2}$ è sottoposto ad un campo magnetico esterno debole, omogeneo e statico, $(0, 0, B)$. L'Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\mu} = g\mathbf{s} = \frac{g}{2}\boldsymbol{\sigma}. \quad (22)$$

- (i) Considerando prima il caso senza il campo magnetico ($\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{A} = 0$), dire quali sono i livelli energetici, qual'è la degenerazione di ciascun livello, e dare i valori possibili del momento angolare orbitale e del momento angolare totale. Rispondere solo per i primi tre livelli energetici.
- (ii) Considerate ora il caso con il campo magnetico non nullo, descritto dal potenziale vettore,

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right). \quad (23)$$

Nell'approssimazione in cui i termini quadratici in B sono trascurati (campo debole), dire quali sono gli operatori conservati.

- (iii) Sfruttando i risultati dei punti (i) e (ii), trovare gli autovalori esatti dell'energia (sempre nell'approssimazione di campo debole), per i livelli corrispondenti al primo livello eccitato del punto (i).

5.3 Moto in campo elettrico costante

Una particella di massa m e carica q è soggetta all'azione di un campo elettrico omogeneo e costante, diretto lungo l'asse z , $\mathbf{E} = E_0\hat{z}$.

- (i) Scrivere le equazioni del moto di Heisenberg per la posizione $\mathbf{r}(t)$ e l'impulso $\mathbf{p}(t)$;
- (ii) Risolvere le suddette equazioni di moto;
- (iii) Trovare gli operatori delle varie componenti del momento angolare $\mathbf{L}(t)$ al generico tempo t , usando le $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ del punto ii);
- (iv) Verificare che $\mathbf{L}(t)$, trovato al punto iii), è compatibile con le equazioni di moto di Heisenberg per $\mathbf{L}(t)$;
- (v) Calcolare i valori medi delle varie componenti del momento angolare al generico tempo t , sapendo che

$$\langle \mathbf{r} \rangle|_{t=0} = 0, \quad \langle \mathbf{p} \rangle|_{t=0} = p_0\hat{x}, \quad \langle \mathbf{L} \rangle|_{t=0} = 0. \quad (24)$$

5.4 Oscillatore e spin

Una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad V(x) = \frac{\sigma_3 + \mathbf{1}}{4} m\omega^2 x^2. \quad (25)$$

- (i) Qual'è lo spettro dell'energia e quali sono le autofunzioni dell'energia?
- (ii) All'istante $t = 0$, il sistema è descritto dalla funzione d'onda $(s_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle)$, etc.)

$$\psi(0, x) = \psi_0(x) \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (26)$$

dove $\psi_0(x)$ è la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico senza lo spin, $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \quad (27)$$

Dire se lo stato (26) è un autostato dell'Hamiltoniana H . Se lo è, qual'è l'autovalore? Altrimenti, determinare il valor medio dell'energia H nello stato (26).

- (iii) Determinare la funzione d'onda a tempo t . All'istante t si misura la componente z dello spin, $s_z = \frac{1}{2}\sigma_3$, con un apparecchio à la Stern-Gerlach situato in $x = 0$. Calcolare la probabilità di trovare il risultato $s_z = -\frac{1}{2}$.

N.B.:

La funzione d'onda calcolata a $x = 0$, $\psi(0, t)$, vista come funzione d'onda di spin, non è normalizzata. Ri-normalizzare $\psi(0, t)$ di modo che sia normalizzata come funzione d'onda di spin.

Potete usare la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-A z^2 + B z} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-A(z - \frac{B}{2A})^2 + \frac{B^2}{4A}} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}} \quad (28)$$

($\text{Re}(A) > 0$).

5.5 Decadimento e parità

Una particella di spin $J = 1$ e parità incognita decade a riposo in due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$.

- (i) Determinare il momento angolare orbitale relativo delle due particelle finali e lo spin totale.
- (ii) Assumendo che il decadimento conservi la parità, determinare la parità della particella iniziale.
- (iii) Il sistema iniziale è nello stato di spin $|J, J_z\rangle = |1, 0\rangle$. Scrivere esplicitamente la funzione d'onda in termini della funzione d'onda radiale (incognita), delle armoniche sferiche del moto relativo, e delle funzioni d'onda di spin delle due particelle finali.

Si fanno una serie di misure dello spin delle due particelle finali con apparecchi à la Stern-Gerlach posti nelle direzioni (θ, ϕ) e $(\pi - \theta, \phi + \pi)$.

- (iv) Considerando le variabili (r, θ, ϕ) come parametri fissati, trovare la funzione d'onda di spin normalizzata, associata alle particelle emesse nelle direzioni (θ, ϕ) e $(\pi - \theta, \phi + \pi)$.
- (v) Calcolare la probabilità che una particella venga emessa in direzione (θ, ϕ) con $s_z = \frac{1}{2}$.
- (vi) Calcolare la probabilità che la misura contemporanea di $(s_y(1), s_y(2))$ dia il risultato $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

6 Problemi per Capitolo 6

6.1 Interazione spin orbita

Si consideri l'Hamiltoniana dell'atomo di un atomo di idrogeno, contenente, oltre all'interazione Coulombiana, un'interazione spin-orbita dell'elettrone,

$$H_{S-O} = A \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_e, \quad (29)$$

e l'interazione fra lo spin dell'elettrone e lo spin del protone ($s_e = s_p = \frac{1}{2}$),

$$H_{S-S} = B \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_e, \quad (30)$$

con A, B costanti.

- (i) Dire qual'è la degenerazione dei livelli $n = 1$ e $n = 2$, tenendo conto anche dello spin dell'elettrone e del protone, quando si trascurano del tutto le interazioni H_{S-O} e H_{S-S} di cui sopra.
- (ii) Trascurando, invece, solo l'interazione H_{S-S} , si classifichino i livelli di $n = 1$ e $n = 2$ dell'atomo mediante gli operatori:

$$\mathbf{L}^2, \mathbf{J}^2, \mathbf{F}^2, F_z, \quad (\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}_e, \mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{s}_p) \quad (31)$$

e si calcolino i relativi autovalori dell'energia.

- (iii) Alcuni degli stati di cui al punto (ii) sono anche autostati dell'Hamiltoniana totale. Dire quali e con quali autovalori.

6.2 Deutone

Il deutone d è un nucleo di carica $+1$ (composto da un protone (p) e da un neutrone (n)), e ha spin 1 parità $+$, $J^P = 1^+$. Il pione π^- di carica -1 (di spin 0) e il deutone, possono formare una sorta di atomo di "deuterio" (il deuterio normale è un atomo di "idrogeno" con un deutone al posto del protone come nucleo). Supponiamo che tale sistema si formi, nell'orbita più bassa di Bohr, per un breve intervallo di tempo. (Fig. 3).

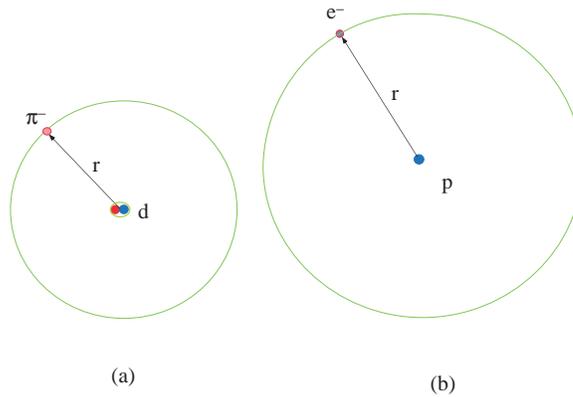


Figura 3: Il sistema considerato nel problema 2 (Fig. 1(a)) e l'atomo di idrogeno (Fig. 1(b)). Le grandezze non sono proporzionali.

- (i) Determinare il rapporto tra il "raggio di Bohr" di questo sistema, r'_B , e il raggio di Bohr standard (dell'atomo di idrogeno); determinare l'energia di legame di questo sistema. La massa del pione è di circa $139.6 \text{ MeV}/c^2$, quella dell'elettrone circa $0.51 \text{ MeV}/c^2$, mentre la massa del deutone e la massa del protone sono rispettivamente $938.3 \text{ MeV}/c^2$ e $1875.6 \text{ MeV}/c^2$.
- (ii) A causa delle interazioni elettromagnetiche e forti, questo sistema non è stabile ma decade secondo la reazione



Nel sistema finale si hanno due neutroni (di spin $1/2$). Nel processo (32) sia il momento angolare totale che la parità sono conservati. Dalla conservazione di queste quantità nel sistema di riposo del centro di massa delle due particelle, e tenendo conto della statistica di Fermi-Dirac, determinare la parità intrinseca del pione π^- .

- (iii) Calcolare la distribuzione angolare dei due neutroni nel sistema di riferimento del centro di massa, sapendo che lo stato iniziale era nello stato $J_z = 0$.

Osservazione:

È interessante chiedersi perché l'atomo di idrogeno non decade tramite il processo un po' analogo (permesso dalle cariche e dalle note leggi delle interazioni elettrodeboli)

$$e + p \rightarrow n + \nu, \tag{33}$$

dove ν è il neutrino. L'unico motivo per cui questo processo non avviene (e di conseguenza l'atomo di idrogeno è stabile) è la conservazione dell'energia relativistica. Dalle masse delle particelle coinvolte, $m_e \simeq 0.511 \text{ MeV}$, $m_p \simeq 938.272 \text{ MeV}$, $m_n \simeq 939.565 \text{ MeV}$, ($m_\nu < O(\text{eV})$ è ignoto ma comunque non negativo), segue che questo processo, partendo dallo stato legato (in cui l'energia totale di riposo è minore della somma $(m_e + m_p) c^2$, appunto di $\frac{e^2}{2r_B}$) è proibito cinematicamente.

6.3 Effetto Mössbauer

Un nucleo atomico in uno stato eccitato (con energia di eccitazione G) emette un fotone e compie una transizione allo stato fondamentale.

- (i) Supponendo che il nucleo abbia massa infinita, si determini l'energia del fotone emesso, E_γ .
- (ii) Supponiamo che il nucleo, libero, di massa M , sia a riposo prima dell'emissione del fotone. Tenendo conto del rinculo del nucleo, si determini approssimativamente l'energia del fotone E_γ (i.e., al primo ordine in $O(G/Mc^2)$). Si assuma $Mc^2 \gg G$.
- (iii) Supponiamo che, invece, il nucleo (sempre di massa M) sia legato ad un centro (fisso) di forza attrattiva. L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \mathbf{r}^2 \tag{34}$$

dove \mathbf{r} è la posizione del centro di massa del nucleo. Il nucleo si trova inizialmente nello stato fondamentale $|\psi^{(0)}\rangle$ della (34), mentre lo stato eccitato interno è come nei punti (i) e (ii). Quali sono i valori possibili per l'energia del fotone emesso in questo caso?

- (iv) Giustificare un'approssimazione secondo la quale lo stato finale del nucleo (sempre nello stato fondamentale del sistema interno) è dato da $e^{i k z} |\psi^{(0)}\rangle$, dopo l'emissione di un fotone di impulso $\mathbf{p} = (0, 0, k \hbar)$. Si chiede la formula per le probabilità $P(E_\gamma)$ per i vari valori di E_γ di cui al punto (iii).
Opzionale: Calcolate esplicitamente $P(E_\gamma)$ facendo uso degli operatori di creazione e di distruzione.

8 Problemi per Cap. 8

8.1 Effetto Zeeman

Un atomo di idrogeno è in uno stato con $n = 2$.

- (i) Dire quali sono l'energia e la degenerazione degli stati di $n = 2$, tenendo conto anche dello spin dell'elettrone (ma non del protone);
- (ii) Supponiamo che l'Hamiltoniana sia modificata da un termine aggiuntivo del tipo "spin-orbita"

$$H' = A \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}, \quad (35)$$

dove A è una costante. Calcolare i livelli energetici, le degenerazioni e i numeri quantici conservati, corrispondenti agli stati del punto (i).

- (iii) Supponiamo, invece, che l'atomo sia sottoposto ad un campo magnetico esterno debole, omogeneo e statico, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. È noto che l'Hamiltoniana in questo caso è approssimativamente

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{e\hbar}{2mc} (\mathbf{L} + 2\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} \quad (36)$$

(effetto Zeeman). In quanti sottolivelli si divide il livello $n = 2$? Quali sono le energie, i numeri quantici e la degenerazione di ciascuno dei sottolivelli?

- (iv) Supponiamo che l'atomo di idrogeno, senza il campo esterno, e senza l'interazione (35), si trovi inizialmente nello stato, $n = 2$, $(J, J_z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e di parità negativa.³ All'istante $t = 0$, si accende il campo magnetico di cui al punto (iii). Dire quali sono i valori possibili di (J, J_z) all'istante t e calcolarne le relative probabilità.

8.2 Livelli di Landau

Un elettrone, considerato qui come una particella carica (carica $-e$) e senza spin, si muove in un piano $x - y$, in un campo magnetico costante e uniforme in direzione perpendicolare al piano, $\mathbf{H} = (0, 0, B)$.

- (i) Studiate lo spettro del sistema, assumendo come potenziale vettore

$$\mathbf{A} = (-By, 0, 0). \quad (37)$$

- (ii) Analizzate lo stesso sistema nella gauge simmetrica

$$\mathbf{A} = (-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0). \quad (38)$$

9 Problemi per Cap. 9

9.1 Oscillatore

Si consideri l'Hamiltoniana $H = H_0 + H_1$, dove

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad H_1 = g\frac{\omega}{2}(xp + px) : \quad (39)$$

g è un parametro reale, $|g| < 1$.

- (i) Si calcoli esattamente lo spettro di H (Suggerimento: si scelga un'appropriata trasformazione unitaria, o un semplice cambiamento delle variabili, per es. del tipo, $p \rightarrow p + \text{cost.}x$, $x \rightarrow x$).
Facoltativo: confrontare il risultato quantistico con il caso classico.
- (ii) Trattando poi H_1 come perturbazione rispetto a H_0 , calcolare lo spostamento dei livelli energetici fino al secondo ordine in g . Confrontare questo risultato approssimato con quello esatto, discutendo quando ha senso trattare H_1 come perturbazione.

³Considerare la parità intrinseca dell'elettrone positiva.

9.2 Oscillatore anarmonico

Si valuti, usando il metodo variazionale, il livello fondamentale e il primo livello eccitato dell'oscillatore anarmonico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha x^4, \quad \alpha > 0. \quad (40)$$

(i) Per il livello fondamentale, si usi come funzione di prova

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\sigma x^2/4} \quad (41)$$

e si determini il parametro σ , minimizzando il valor medio dell'energia sulla (41) al variare di σ .

(ii) Per il primo livello eccitato procedere come prima, utilizzando però come funzione di prova

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\sigma^3}{2\pi}\right)^{1/4} x e^{-\sigma x^2/4}. \quad (42)$$

(iii) Fornire un criterio in base al quale la funzione d'onda (41) è adatta al calcolo variazionale del fondamentale, mentre la (42) può descrivere il primo stato eccitato.

Formula utile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} \psi_0(x)^2 = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \sigma^{-n}, \quad (43)$$

dove $\psi_0(x)$ è la funzione d'onda (41).

10 Problemi per Cap. 10

10.1 Interferenza gravitazionale

Consideriamo un interferometro di neutrone, schematicamente mostrato nella figura Fig. 4. L'Hamiltoniana per descrivere il moto del neutrone è

$$H = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2M} + M g z, \quad (44)$$

dove M è la massa del neutrone, $g = 980 \text{ cm/sec}^2$, \hat{x} la direzione orizzontale (che coincide con la direzione incidente) e \hat{z} la direzione verticale. Supponiamo che all'inizio il piano $BCED$ sia verticale (contiene l'asse \hat{z}) mentre ABD coincida con l'asse x .

(i) Dire qual'è la lunghezza d'onda di de Broglie (λ) del neutrone incidente, in termini dell'impulso incidente p ($E = \frac{p^2}{2M}$).

(ii) Assumendo $\frac{p^2}{2M} \gg M g z$, determinare la differenza della fase $\Delta\Phi$ della funzione d'onda corrispondente al cammino $ABCEF$ e al cammino $ABDEF$, in termini di $(\lambda, g, h_0, L, \hbar, M)$.

(iii) Determinare la condizione per cui si ha massima interferenza;

(iv) L'apparato contenente il piano $BCED$ è ruotato di un angolo ϕ attorno all'asse incidente x , ABD . Quando ϕ varia, l'intensità dei neutroni in arrivo al contatore F , I , varia con ϕ , mostrando dei massimi e dei minimi. Dire quanti massimi appaiono quando ϕ varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$. Il neutrone incidente ha velocità $v = 3 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}$, si consideri $h_0 L = 10 \text{ cm}^2$. Ricordiamo che $M = 1.7 \cdot 10^{-24} \text{ gr}$, $\hbar = 1 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec}$.

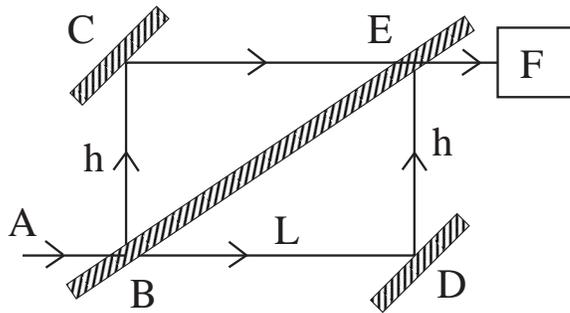


Figura 4: Interferometro del neutrone

N.B. Questa interferenza dovuta alla fase gravitazionale è stata osservata da Colella, Overhauser e Werner (vedi Phys. Rev. Lett. (1975) 1472). La “caduta gravitazionale” del neutrone e la conseguente deviazione della traiettoria dalla retta durante i tragitti può essere trascurata per la considerazione dell’interferenza.

Soluzioni

11 [2] Soluzioni per Capitolo 2

11.1 2.1 Sistema a 3 stati

(i)

$$H = H_0 + H' = E_0 \mathbf{1} - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Diagonalizzandola, si ottengono gli autovalori di H :

$$E_0 - \epsilon, \quad E_0, \quad E_0 + \epsilon \quad (46)$$

con rispettivi autostati,

$$|\tilde{1}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle}{2}, \quad |\tilde{2}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{|1\rangle - |3\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (47)$$

$$|\tilde{3}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle}{2}. \quad (48)$$

(ii) I livelli non degeneri devono essere anche autostati di Π , con autovalori, ± 1 . Infatti, lo stato fondamentale e il secondo stato eccitato sono pari rispetto a Π mentre il primo stato eccitato è dispari.

(iii)

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{|\tilde{1}\rangle + \sqrt{2}|\tilde{2}\rangle + |\tilde{3}\rangle}{2}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{|\tilde{1}\rangle - |\tilde{3}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (49)$$

$$|3\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{|\tilde{1}\rangle - \sqrt{2}|\tilde{2}\rangle + |\tilde{3}\rangle}{2}. \quad (50)$$

(iv)

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-iE_0 t/\hbar} \frac{e^{i\epsilon t/\hbar} |\tilde{1}\rangle + \sqrt{2} |\tilde{2}\rangle + e^{-i\epsilon t/\hbar} |\tilde{3}\rangle}{2} \\ &= \frac{e^{-iE_0 t/\hbar}}{4} [e^{i\epsilon t/\hbar} (|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle) + 2(|1\rangle - |3\rangle) \\ &\quad + e^{-i\epsilon t/\hbar} (|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle)] \\ &= \frac{e^{-iE_0 t/\hbar}}{2} [(1 + \cos \frac{\epsilon t}{\hbar})|1\rangle + \sqrt{2} i \sin \frac{\epsilon t}{\hbar} |2\rangle + (-1 + \cos \frac{\epsilon t}{\hbar})|3\rangle]. \quad (51) \end{aligned}$$

Un esempio fisico di un sistema del genere potrebbe essere un elettrone che si muove in un potenziale unidimensionale “a tripla buca” (Fig. 5). - un elettrone in una molecola triatomica lineare. Se le barriere tra 1 e 2, e tra 2 e 3 fossero infinitamente alte, lo stato fondamentale sarebbe tre volte degenere, con le funzioni d’onda localizzate rispettivamente attorno a x_1 , x_2 e x_3 , con l’energia E_0 , i.e.,

$$H_0|i\rangle = E_0|i\rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (52)$$

Tuttavia c’è un’ampiezza non nulla per penetrazione via l’effetto tunnel tra due buche adiacenti. Questo sistema si riduce al modello considerato sopra. La probabilità (P_i) che l’elettrone, inizialmente (a $t = 0$) localizzato all’atomo 1, si trovi all’istante t localizzato attorno agli atomi $i = 1, 2, 3$, sono

$$P_1 = \frac{(1 + \cos \frac{ct}{\hbar})^2}{4}; \quad P_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{ct}{\hbar}; \quad P_3 = \frac{(1 - \cos \frac{ct}{\hbar})^2}{4}. \quad (53)$$

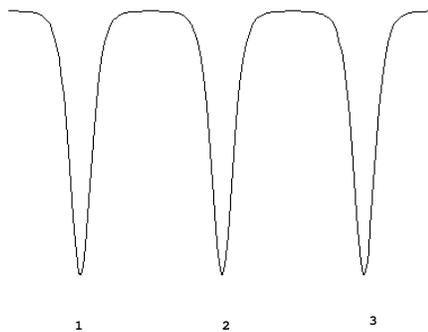


Figura 5: Un potenziale a tripla-buca: i minimi sono a x_1 , x_2 e x_3 .

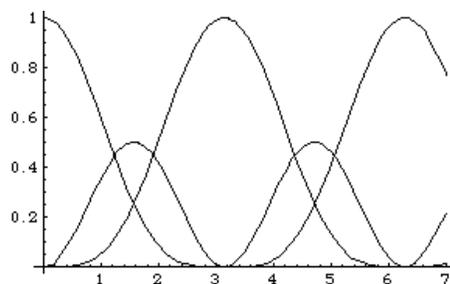


Figura 6: Grafici di P_i

11.2 2.2 Sistema a 2 stati

(i) No. Se η fosse complesso H non sarebbe Hermitiano. Si noti che non è possibile rendere reali gli elementi non diagonali con una ridefinizione dei vettori di base, poiché l’elemento di matrice (12) e quello (21) acquisterebbero fasi opposte. Un’altra nota ancora: gli autovalori di energia sarebbero complessi, con η complesso.

(ii) Supponendo che $\eta > 0$,

$$|-\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}; \quad E_- = E_0 - \eta, \quad (54)$$

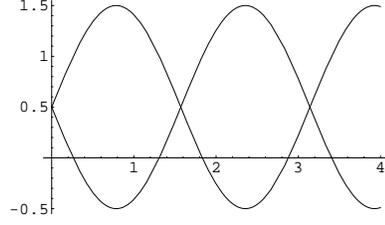


Figura 7:

è lo stato fondamentale;

$$|+\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}; \quad E_+ = E_0 + \eta, \quad (55)$$

è lo stato eccitato.

(iii) L'inverso di

$$|1\rangle = \frac{|-\rangle + |+\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |2\rangle = \frac{|-\rangle - |+\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|-\rangle + |+\rangle + i(|-\rangle - |+\rangle)}{2} \\ &= \frac{(1+i)|-\rangle + (1-i)|+\rangle}{2} \Rightarrow \\ \psi(t) &= \frac{(1+i)e^{-iE_-t/\hbar}|-\rangle + (1-i)e^{-iE_+t/\hbar}|+\rangle}{2} \\ &= e^{-iE_0t/\hbar} \frac{(1+i)e^{i\eta t/\hbar}|-\rangle + (1-i)e^{-i\eta t/\hbar}|+\rangle}{2} \\ &= e^{-iE_0t/\hbar} \frac{(1+i)e^{i\eta t/\hbar}(|1\rangle + |2\rangle) + (1-i)e^{-i\eta t/\hbar}(|1\rangle - |2\rangle)}{2\sqrt{2}} \\ &= e^{-iE_0t/\hbar} \frac{(\cos \frac{\eta t}{\hbar} - \sin \frac{\eta t}{\hbar})|1\rangle + i(\cos \frac{\eta t}{\hbar} + \sin \frac{\eta t}{\hbar})|2\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (57)$$

Perciò (Fig. 7)

$$P_1(t) = \frac{1}{2} (\cos \frac{\eta t}{\hbar} - \sin \frac{\eta t}{\hbar})^2 = \frac{1 - \sin \frac{2\eta t}{\hbar}}{2}; \quad (58)$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2} (\cos \frac{\eta t}{\hbar} + \sin \frac{\eta t}{\hbar})^2 = \frac{1 + \sin \frac{2\eta t}{\hbar}}{2}. \quad (59)$$

11.3 2.3 Sistema a 3 stati, autostati e autovalori

(i) Gli autovalori di A sono $\pm a$ e 0. Gli autostati sono

$$|A : a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad |A : -a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad |A : 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

(ii) Gli autovalori di

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

sono b , b e $-b$, con autostati

$$|B : b, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |B : b, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |B : -b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) All'istante $t = 0$ lo stato è

$$|A : a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|B : b, 1\rangle + i \frac{|B : b, 2\rangle - |B : -b\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (62)$$

La probabilità che la misura di B in questo stato dia l'autovalore massimo (b) è uguale alla somma delle probabilità che il sistema si trovi o in $|B : b, 1\rangle$ o in $|B : b, 2\rangle$:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad (63)$$

Per completezza, la probabilità che la misura dia $-b$ è $\frac{1}{4}$.

(iv) Sì, perché lo stato a t generico è

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t/\hbar} \\ 0 \\ i e^{-iE_3 t/\hbar} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-iE_1 t/\hbar} |B : b, 1\rangle + i e^{-iE_3 t/\hbar} \frac{|B : b, 2\rangle - |B : -b\rangle}{\sqrt{2}} \right]; \quad (64)$$

P rimane uguale,

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad (65)$$

12 [3] Soluzioni per Capitolo 3

12.1 3.1 Particella fra pareti

(i) La pressione è per definizione la forza (per unità di area) che la particella esercita sulla parete. Per comprimere la scatola di δa , occorre un lavoro $P \cdot \delta a$. Questo è uguale alla variazione di energia,

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(a - \delta a)^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m a^3} \delta a + O((\delta a)^2), \quad (66)$$

perciò

$$P = P(a) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m a^3}. \quad (67)$$

(ii) La funzione d'onda è inizialmente

$$\psi = \theta(x) \theta(a - x) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (68)$$

Dopo l'allargamento istantaneo della buca, rimane la stessa, ma non è più un'autostato dell'energia. La probabilità che la particella si trovi in vari stati di energia definita

è

$$\begin{aligned}
P_n &= |\langle n | \psi \rangle|^2 = \left| \sqrt{\frac{2}{2a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \int dx \sin \frac{\pi n x}{2a} \sin \frac{\pi x}{a} \right|^2 \\
&= \frac{2}{a^2} \left| \int_0^a dx \frac{\cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{\pi x}{a} - \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{\pi x}{a}}{2} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2a^2} \left[\left| \frac{a}{\pi\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{\pi x}{a} - \frac{a}{\pi\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{\pi x}{a} \right|_0^a \right]^2, \\
P_n &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } n = 2, \\ 0 & \text{per } n = 2\ell, \quad \ell = 2, 3, 4, \dots, \\ \frac{32}{\pi^2(4\ell^2 - 4\ell - 3)^2} & \text{per } n = 2\ell - 1, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (69)
\end{aligned}$$

Visto che

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(4\ell^2 - 4\ell - 3)^2} = \frac{\pi^2}{64}, \quad (70)$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1. \quad (71)$$

(iii) Nel caso adiabatico, non avvengono transizioni quantistiche: il sistema “resta” nello stato fondamentale. Lo stato finale è

$$\psi = \theta(x) \theta(2a - x) \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{\pi x}{2a}, \quad (72)$$

l'energia decresce lentamente da $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$ a $\frac{\pi^2 \hbar^2}{8m a^2}$. Il lavoro fatto dalla particella è:

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m a^2} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{8m a^2}. \quad (73)$$

che è uguale a

$$\int P \cdot dV = \int_a^{2a} P(a) da, \quad (74)$$

come ci si aspetta.

12.2 3.2 Potenziale a delta

(i) La funzione d'onda ha la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{\kappa x}, & x < 0, \\ B e^{\kappa x} + C e^{-\kappa x}, & x > a. \end{cases} \quad (75)$$

dove $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2} > 0$. La condizione di continuità a $x = 0$ è

$$B + C = A, \quad (76)$$

la condizione di continuità sulla derivata prima a $x = 0$ è

$$\psi'_+ - \psi'_- = -\frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0), \quad (77)$$

cioè,

$$B - C = \left(1 - \frac{2mg}{\hbar^2 \kappa}\right) A. \quad (78)$$

Combinando queste due si trova

$$B = \left(1 - \frac{m g}{\hbar^2 \kappa}\right) A; \quad C = \frac{m g}{\hbar^2 \kappa} A. \quad (79)$$

La condizione a $x = a$ è

$$\psi(a) = B e^{\kappa a} + C e^{-\kappa a} = 0. \quad (80)$$

Sostituendo B e C dalla (79), si ha

$$1 - e^{-2\kappa a} = \frac{\hbar^2 \kappa}{m g}, \quad (81)$$

per avere una soluzione con $A \neq 0$. Dai grafici delle curve $y = 1 - e^{-2ax}$ e $y = \frac{\hbar^2 x}{m g}$ (Fig. 8) si vede che per $\frac{\hbar^2}{2 m g} < a$ esiste una soluzione della (81) con $\kappa > 0$, mentre per $\frac{\hbar^2}{2 m g} \geq a$ l'unica soluzione è $\kappa = 0$, che non corrisponde ad uno stato legato.

La (81) può essere scritta alternativamente come:

$$\xi (1 + \coth \xi) = \frac{2 m g a}{\hbar^2}, \quad \xi \equiv \kappa a, \quad (82)$$

da cui segue ugualmente la condizione $\frac{2 m g a}{\hbar^2} > 1$ per l'esistenza di una soluzione non banale per $\kappa > 0$.

(ii) Nel limite $a \rightarrow \infty$, $1 - e^{-2\kappa a} \rightarrow 1$, perciò la soluzione è

$$\kappa = \frac{m g}{\hbar^2}, \quad (83)$$

che è il ben noto risultato per una singola buca delta.

(iii) Non esistono degenerazioni.

Per vedere questo fatto, osserviamo che la funzione d'onda ha la forma (con $k \geq 0$)

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{i k x} + B e^{-i k x}, & x < 0, \\ C e^{i k x} + D e^{-i k x}, & 0 < x < a, \\ 0 & x \geq a. \end{cases} \quad (84)$$

La condizione a $x = a$ ($\psi = 0$) fissa la relazione tra C e D ; le condizioni a $x = 0$ determinano A e B in termini di C , per cui per ogni k la soluzione è unica a parte la normalizzazione.

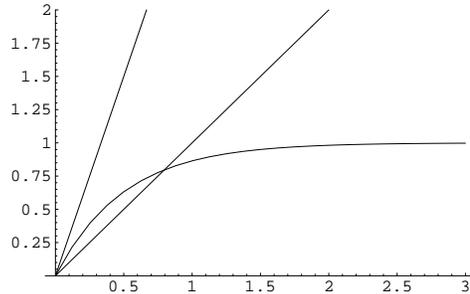


Figura 8:

12.3 3.3 Potenziale a delta e pareti

(i)

$$\psi_-(x) = A \sin k(x+a); \quad \psi_+(x) = B \sin k(x-2a). \quad (85)$$

(ii) La condizione sulla funzione d'onda è:

$$A \sin ka = -B \sin 2ka; \quad (86)$$

la condizione sulla derivata è:

$$\psi'_+(0) - \psi'_-(0) = \frac{2mg}{\hbar^2} A \sin ka, \quad (87)$$

i.e.,

$$k [B \cos 2ka - A \cos ka] = \frac{2mg}{\hbar^2} A \sin ka. \quad (88)$$

Dalla prima condizione (86) segue che

$$\sin ka (A + 2B \cos ka) = 0. \quad (89)$$

Una possibilità è

$$\sin ka = 0, \quad k = \frac{\pi n}{a}, \quad E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (90)$$

I coefficienti A, B sono determinati dalla condizione (88):

$$B \cos 2ka - A \cos ka = 0, \quad B = (-)^n A. \quad (91)$$

(iii) Un'altra possibilità che segue dalla (89) è

$$A + 2B \cos ka = 0, \quad A = -2B \cos ka. \quad (92)$$

Sostituendo questa relazione nella (88), si ha

$$k \cos 2ka + 2k \cos^2 ka = -\frac{4mg}{\hbar^2} \cos ka \sin ka, \quad (93)$$

o definendo $\xi \equiv 2ka$,

$$\xi (2 \cos \xi + 1) = -\Lambda \sin \xi, \quad \Lambda = \frac{4mga}{\hbar^2} > 0. \quad (94)$$

(vedi Fig.9). Dai grafici delle curve,

$$\eta = \xi (2 \cos \xi + 1), \quad \eta = -\Lambda \sin \xi, \quad (95)$$

si vede facilmente che il primo stato di questo gruppo corrisponde ad un valore di $\xi = 2ka$ che sta nella regione

$$\frac{2\pi}{3} < \xi < \pi, \quad \frac{\pi}{3a} < k < \frac{\pi}{2a}. \quad (96)$$

Paragonando questo con la (90), si vede che l'intervallo (96) dà lo stato fondamentale, mentre lo stato più basso del gruppo (90) con $n = 1$ è il primo stato eccitato del sistema. Nei due limiti, $g \rightarrow 0$ e $g \rightarrow \infty$, anche Λ tende a zero o a ∞ . A $\Lambda \rightarrow 0$, dal grafico si vede che la prima intersezione si avvicina al primo zero della curva $\eta = \xi (2 \cos \xi + 1)$ (cioè $\frac{2\pi}{3}$), mentre a $\Lambda \rightarrow \infty$ essa si avvicina al primo zero della $\sin \xi$, π . Di conseguenza k tende a $\frac{\pi}{3a}$ e a $\frac{\pi}{2a}$, nei due limiti.

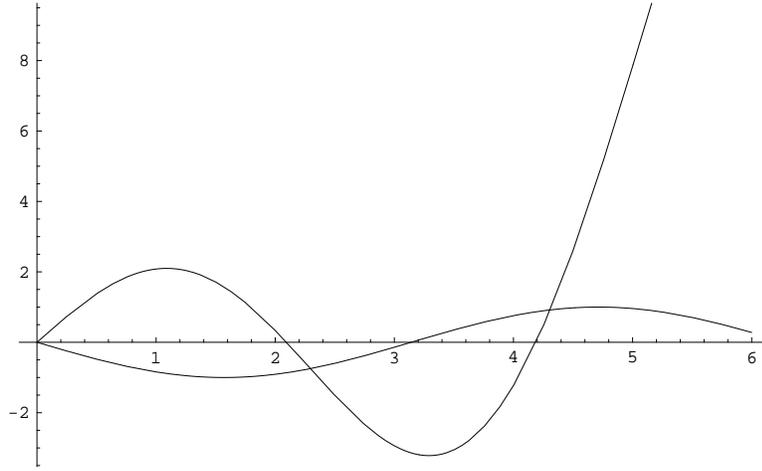


Figura 9:

12.4 3.4 Potenziale con 2 delta

(i)

$$E = -\frac{mg}{\hbar^2}; \quad \psi = \sqrt{\kappa} [\theta(a-x) e^{\kappa(x-a)} + \theta(x-a) e^{-\kappa(x-a)}], \quad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2}. \quad (97)$$

(ii)

$$\psi(x) = A_1 e^{\kappa x} \theta(-x) + [A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x}] \theta(x) \theta(a-x) + B_3 e^{-\kappa x} \theta(x-a) \quad (98)$$

$$A_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad (99)$$

$$A_1 = A_2 + B_2, \quad (100)$$

$$A_2 e^{\kappa a} + B_2 e^{-\kappa a} = B_3 e^{-\kappa a} \quad (101)$$

dalla continuità della funzione d'onda e dalla normalizzabilità. Le condizioni sulla discontinuità corrispondenti ai potenziali delta sono:

$$\kappa (-A_1 + (A_2 - B_2)) = \frac{2mf}{\hbar^2} A_1; \quad (102)$$

$$-\kappa [B_3 e^{-\kappa a} + A_2 e^{\kappa a} - B_2 e^{-\kappa a}] = -\frac{2mg}{\hbar^2} B_3 e^{-\kappa a}. \quad (103)$$

Ci sono quattro equazioni per quattro incognite, ma visto che le equazioni sono omogenee in A_1, A_2, B_2, B_3 ,

$$M \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (104)$$

queste danno soluzioni non banali solo se i coefficienti soddisfano la condizione

$$\det M = 0. \quad (105)$$

(iii) Invece di scrivere M e calcolare direttamente $\det M$, conviene risolvere per A_2, B_2 dalle eq. (100) e eq. (102), e per $A_2 e^{\kappa a}, B_2 e^{-\kappa a}$ dalle eq. (101) e eq. (103):

$$A_2 = \left(1 + \frac{mf}{\kappa \hbar^2}\right) A_1; \quad B_2 = -\frac{mf}{\kappa \hbar^2} A_1; \quad (106)$$

$$A_2 e^{\kappa a} = \frac{mg}{\kappa \hbar^2} B_3 e^{-\kappa a}; \quad B_2 e^{-\kappa a} = \left(1 - \frac{mg}{\kappa \hbar^2}\right) B_3 e^{-\kappa a}. \quad (107)$$

Eliminando A_i e B_i , si ha

$$\left[1 + \frac{mf}{\kappa \hbar^2}\right] \left[1 - \frac{mg}{\kappa \hbar^2}\right] e^{2\kappa a} = -\frac{mf}{\kappa \hbar^2} \frac{mg}{\kappa \hbar^2} \quad (108)$$

oppure

$$\left[\frac{\kappa \hbar^2}{mg} + \frac{f}{g}\right] \left[\frac{\kappa \hbar^2}{mg} - 1\right] e^{2\kappa a} = -\frac{f}{g}. \quad (109)$$

Ponendo $\frac{\kappa \hbar^2}{mg} \equiv x$, la condizione è

$$\left(x + \frac{f}{g}\right) (x - 1) = -\frac{f}{g} e^{-Ax}, \quad A = \frac{2mga}{\hbar^2}. \quad (110)$$

Si chiede se ci sono soluzioni con $x > 0$.

Per $f = 0$, si ritrova la nota soluzione per una singola buca delta,

$$x = 1, \quad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2}. \quad (111)$$

Per $f = -g$ (doppia buca delta simmetrica) la condizione si riduce a

$$1 - \frac{mg}{\kappa \hbar^2} = \pm \frac{mg}{\kappa \hbar^2} e^{-\kappa a}, \quad (112)$$

come è noto.

Per $|f|$ sufficientemente piccolo, la soluzione è unica ed è approssimativamente

$$x \simeq 1 - \frac{f}{g} e^{-A}, \quad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2} \left(1 - \frac{f}{g} e^{-A}\right). \quad (113)$$

$$E \simeq -\frac{mg^2}{\hbar^2} + \frac{mf g}{\hbar^2} e^{-\frac{2mga}{\hbar^2}}. \quad (114)$$

Dai grafici dei due membri della (110) segue che se la derivata prima del primo membro a $x = 0$ è più grande della derivata prima del secondo membro,

$$\frac{f}{g} - 1 > \frac{f}{g} A, \quad (115)$$

i.e., se $A = \frac{2mga}{\hbar^2} < 1$ e per

$$f > \frac{g}{1 - \frac{2mga}{\hbar^2}} \quad (116)$$

la (110) non ha alcuna soluzione. (Vedi Fig. 10).

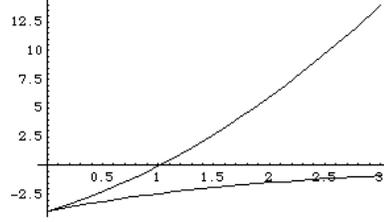


Figura 10: I due membri della (110)

12.5 3.5 Buca asimmetrica

(i) Nella regione interna della buca,

$$\psi = A \sin kx, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}; \quad (117)$$

mentre al di fuori

$$\psi = B e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}. \quad (118)$$

La condizione di continuità in a è

$$\kappa = -k \cot ka. \quad (119)$$

Oppure, definendo $\xi = ka$; $\eta = \kappa a$,

$$\eta = -\xi \cot \xi; \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}. \quad (120)$$

Risolvendo col metodo grafico, la condizione richiesta è

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (121)$$

(ii) Nel limite di grande V_0

$$\psi \simeq A \sin kx, \quad k = \frac{\pi n}{a}, \quad \therefore E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad \psi^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (122)$$

(iii) Applicando il risultato del calcolo della penetrazione di barriera quadratica (Eq.(5.114)) si ha la probabilità di tunnelling,

$$D \simeq \frac{4k^2}{\kappa^2 \sinh^2 \kappa a} \simeq \frac{16k^2}{\kappa^2} e^{-2\kappa a}, \quad k = \frac{\pi}{a}, \quad \kappa \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}. \quad (123)$$

Per la probabilità di decadimento per unità di intervallo di tempo dobbiamo moltiplicare questa probabilità con la probabilità che la particella arrivi alla barriera di destra ($x = a$) in un intervallo unitario del tempo. Quest'ultimo è dato da

$$\frac{v}{2a} = \frac{k\hbar}{2ma}. \quad (124)$$

Notiamo anche che

$$\psi^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2i} \quad (125)$$

per cui

$$j_{\rightarrow} = \frac{v}{2a} = \frac{k\hbar}{2ma}, \quad (126)$$

in accordo con la (124). Perciò

$$P = j_{x>2a} = j_{\rightarrow} \cdot D \simeq \frac{4k^3\hbar^3}{m^2V_0a} e^{-2\kappa a} = \frac{4\pi^3\hbar^3}{m^2V_0a^4} e^{-2\sqrt{2mV_0/\hbar^2}a}. \quad (127)$$

13 [4] Soluzioni per Capitolo 4

13.1 4.1 Oscillatore

(i) Il valor medio dell'energia è una costante del moto, perciò basta calcolarlo al tempo $t = 0^+$:

per $t < 0$

$$H = H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}; \quad (128)$$

per $t > 0$,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x - x_0)^2 = H_0 - m\omega^2 x_0 x + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2, \quad (129)$$

quindi

$$\langle H \rangle = \langle \psi_0 | H_0 - m\omega^2 x_0 x + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 | \psi_0 \rangle = \frac{1}{2}\omega\hbar + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2. \quad (130)$$

poiché la funzione d'onda a $t = 0^+$ è quella dello stato fondamentale di H_0 .

(ii) Osserviamo che le probabilità richieste non dipendono dal tempo, essendo H costante del moto per $t > 0$. Infatti, esprimendo la funzione d'onda a $t = 0^+$ come

$$\psi(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \psi^{(n)}(x), \quad (131)$$

dove $\psi^{(n)}(x)$ sono autostati di H , la funzione d'onda per t generico è

$$\psi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n e^{-i E_n t/\hbar} \psi^{(n)}(x), \quad (132)$$

perciò le probabilità di trovare il sistema in uno degli autostati di H sono

$$P_n = |a_n e^{-i E_n t/\hbar}|^2 = |a_n|^2 \quad (133)$$

e sono indipendenti dal tempo. Per calcolare $a_n = \langle \psi^{(n)} | \psi_0 \rangle$ basta ricordare che a $t = 0$ la funzione d'onda è data da:

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}; \quad (134)$$

mentre gli stati stazionari di H sono

$$\psi^{(0)}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}; \quad (135)$$

$$\psi^{(1)}(x) = i \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}; \quad (136)$$

$$a_0 = \int dx \psi^{(0)*}(x) \psi(x, 0), \quad (137)$$

$$a_1 = \int dx \psi^{(1)*}(x) \psi(x, 0). \quad (138)$$

Il calcolo è elementare, il risultato è

$$P_0 = |a_0|^2 = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2}; \quad (139)$$

$$P_1 = |a_1|^2 = \frac{m\omega x_0^2}{2\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2}. \quad (140)$$

È interessante fare il calcolo di a_n facendo uso degli operatori di creazione e di annichilazione. Siano a, a^\dagger gli operatori definiti rispetto a H_0 in maniera standard, e $\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ gli operatori corrispondenti a H :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p; \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p, \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x - x_0) + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p; \\ \tilde{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x - x_0) - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p. \end{aligned} \quad (142)$$

Evidentemente

$$\tilde{a} = a - C, \quad \tilde{a}^\dagger = a^\dagger - C, \quad C = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0. \quad (143)$$

Ora scriviamo lo sviluppo (131) in notazione di Dirac,

$$|0\rangle = \sum_n a_n |n\rangle', \quad (144)$$

dove

$$\tilde{a} |n\rangle' = \sqrt{n} |n-1\rangle', \quad n = 1, 2, \dots, \quad (145)$$

visto che $|n\rangle'$ è l' n -simo autostato di H . La condizione che $|0\rangle$ sia lo stato fondamentale di H_0 è

$$a |0\rangle = 0, \quad [\tilde{a} + C] \sum_n a_n |n\rangle' = 0, \quad (146)$$

dal quale si ottengono (facendo uso di (145)) delle relazioni di ricorrenza

$$a_n = \frac{(-C)}{\sqrt{n}} a_{n-1} = \dots = \frac{(-C)^n}{\sqrt{n!}} a_0. \quad (147)$$

Dalla condizione di normalizzazione

$$1 = \sum_n |a_n|^2 = |a_0|^2 e^{C^2}, \quad \therefore |a_0|^2 = e^{-C^2}. \quad (148)$$

Si trova dunque che la probabilità di trovare il sistema nell' n -simo stato della nuova Hamiltoniana è

$$P_n = |a_n|^2 = \frac{C^{2n}}{n!} e^{-C^2} \quad (149)$$

che è una distribuzione Poissoniana. Per $n = 0$ e $n = 1$ ovviamente il risultato è in accordo con quanto trovato prima, ma questo metodo è più adatto per calcolare le probabilità P_n per n generico.

- (iii) I valori medi di x e di p non subiscono discontinuità, a causa dell'accensione della perturbazione. Infatti la funzione d'onda è uguale a $t = 0^-$ e a $t = 0^+$. Analogamente per $\frac{d}{dt}x$ che è uguale a p/m . Invece

$$\frac{d}{dt}p = -\frac{\partial}{\partial x}V(x), \quad (150)$$

è discontinua a causa del cambiamento di $V(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}V(x) = m\omega^2 x, \quad t = 0^-; \quad (151)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}V(x) = m\omega^2 (x - x_0), \quad t = 0^+. \quad (152)$$

La discontinuità richiesta è

$$\Delta \left\langle \frac{d}{dt}p \right\rangle = m\omega^2 x_0. \quad (153)$$

14 [5] Soluzioni per Capitolo 5

14.1 5.1 Spin in campo magnetico

- (i) Consideriamo prima la funzione d'onda di uno spin $\frac{1}{2}$, nella direzione \mathbf{n} :

$$|\mathbf{n}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (154)$$

Lo stato in questione, di spin $S = N/2$ nella direzione \mathbf{n} , può essere costruito da N particelle di spin $\frac{1}{2}$ paralleli:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}_2 \cdots \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}_N. \quad (155)$$

Il valor medio di $S_x = \sum_i^N s_{ix}$ è

$$\langle S_x \rangle = N \langle \mathbf{n} | s_{1x} | \mathbf{n} \rangle = \frac{N}{2} (e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}) = S \cos \phi \sin \theta. \quad (156)$$

Analogamente,

$$\langle S_y \rangle = S \sin \phi \sin \theta, \quad \langle S_z \rangle = S \cos \theta. \quad (157)$$

- (ii) Scrivendo la (155) come

$$\begin{aligned} |0\rangle &= (e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle_1 + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle_1) \cdots (e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle_N + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle_N) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k |S, S_z = \frac{k}{2}\rangle \end{aligned} \quad (158)$$

$|S, S_z = \frac{k}{2}\rangle$ è la combinazione simmetrica

$$|S, S_z = \frac{k}{2}\rangle = \binom{N}{\ell}^{-1/2} \sum |\uparrow\uparrow \dots \downarrow \dots\rangle \quad (159)$$

dei termini con ℓ spin up e $N - \ell$ spin down. Chiaramente,

$$\frac{\ell}{2} - \frac{N - \ell}{2} = \frac{2\ell - N}{2} = \frac{k}{2}, \quad (160)$$

perciò

$$k = 2\ell - N, \quad \ell = \frac{N + k}{2}, \quad (161)$$

e

$$c_k = \binom{N}{\ell}^{1/2} (e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2})^\ell (e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2})^{N-\ell} \quad (162)$$

La probabilità richiesta è

$$P_k = \binom{N}{\ell} (\cos^2 \frac{\theta}{2})^\ell (\sin^2 \frac{\theta}{2})^{N-\ell}, \quad \ell = \frac{N + k}{2}. \quad (163)$$

$$\sum_{k=-N}^N P_k = \sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} (\cos^2 \frac{\theta}{2})^\ell (\sin^2 \frac{\theta}{2})^{N-\ell} = (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})^N = 1. \quad (164)$$

(iii)

$$S_x(t) = e^{iHt/\hbar} S_x e^{-iHt/\hbar} = e^{i\beta S_z t/\hbar} S_x e^{-i\beta S_z t/\hbar}, \quad (165)$$

etc. In particolare, $S_z(t) = S_z(0) = S_z$.

$$i \frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{1}{\hbar} [S_x, H] = -\frac{1}{\hbar} \beta [S_x, S_z] = i \beta S_y; \quad (166)$$

$$i \frac{d}{dt} S_y(t) = \frac{1}{\hbar} [S_y, H] = -\frac{1}{\hbar} \beta [S_y, S_z] = -i \beta S_x; \quad (167)$$

$$i \hbar \frac{d}{dt} S_z(t) = [S_z, H] = 0. \quad (168)$$

Prima di tutto si osserva che

$$S_z(t) = S_z(0) = S_z. \quad (169)$$

$$\ddot{S}_x = -\beta^2 S_x, \quad \ddot{S}_y = -\beta^2 S_y; \quad (170)$$

Queste si risolvono ponendo

$$S_x(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t. \quad (171)$$

Gli operatori A, B si determinano facendo uso della condizione al contorno a $t = 0$:

$$S_x(t) = S_x \cos \beta t + S_y \sin \beta t; \quad (172)$$

e analogamente,

$$S_y(t) = S_y \cos \beta t - S_x \sin \beta t; \quad (173)$$

Allora

$$\begin{aligned} \langle t | S_x | t \rangle &= \langle 0 | S_x(t) | 0 \rangle = S (\cos \phi \sin \theta \cos \beta t + \sin \phi \sin \theta \sin \beta t) \\ &= S \cos(\phi - \beta t) \sin \theta, \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} \langle t | S_y | t \rangle &= \langle 0 | S_y(t) | 0 \rangle = S (\sin \phi \sin \theta \cos \beta t - \cos \phi \sin \theta \sin \beta t) \\ &= S \sin(\phi - \beta t) \sin \theta. \end{aligned} \quad (175)$$

14.2 5.2 Oscillatore in campo magnetico

(i) I livelli energetici dell'oscillatore 3D sono

$$E_N = \omega \hbar \left(N + \frac{3}{2}\right), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (176)$$

Si ha la degenerazione corrispondente ad un insieme di tre numeri interi non negativi (n_1, n_2, n_3) tali che

$$N = n_1 + n_2 + n_3, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (177)$$

oltre ad una doppia degenerazione di ogni livello dovuto allo spin. Il grado di degenerazione allora è data da 2, 6, 12, etc. ed in generale $(N+1)(N+2)$ per il livello N . Vista la parità del livello N , $(-)^N$, e la forma delle funzioni d'onda, i possibili valori di L sono

$$L = N, N-2, \dots, 0(1). \quad (178)$$

Per i primi tre livelli,

1. $N = 0, L = 0, J = \frac{1}{2}$;
2. $N = 1, L = 1, J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$;
3. $N = 2, L = 2$ e $L = 0$. Il momento angolare totale prende valori $J = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

(ii) In questa approssimazione,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} - \frac{eB\hbar}{2mc} L_z - \frac{gB}{2} \sigma_z. \quad (179)$$

Gli operatori $\mathbf{L}^2, \mathbf{s}^2, L_z, s_z$ e la parità commutano con l'Hamiltoniana.

(iii) Gli autostati di H sono gli stati di N, L_z, s_z definiti. Gli autovalori sono

$$E_{N,L_z,s_z} = \hbar\omega \left(\frac{3}{2} + N\right) - \frac{eB\hbar}{2mc} L_z - \frac{gB}{2} \sigma_z. \quad (180)$$

14.3 5.3 Moto in campo elettrico costante

(i)

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - qE_0 z, \quad (181)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{p}] = qE_0 \hat{z}; \quad (182)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{r}] = \frac{\mathbf{p}}{m}; \quad (183)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{qE_0}{m} \hat{z} \quad (184)$$

(accelerazione costante.)

(ii)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \frac{t}{m} \mathbf{p}(0) + \frac{1}{2} \frac{qE_0}{m} t^2 \hat{z}; \quad (185)$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + qE_0 t \hat{z}; \quad (186)$$

(iii) $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$:

$$L_z(t) = L_z(0); \quad (187)$$

$$L_x(t) = L_x(0) + q E_0 t y(0) + \frac{1}{2} \frac{q E_0}{m} t^2 p_y(0); \quad (188)$$

$$L_y(t) = L_y(0) - q E_0 t x(0) - \frac{1}{2} \frac{q E_0}{m} t^2 p_x(0). \quad (189)$$

(iv)

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{L}], \quad (190)$$

$$\dot{L}_z(t) = 0, \quad L_z(t) = L_z(0) \quad (191)$$

(costante del moto);

$$\dot{L}_x(t) = q E_0 y(t), \quad \dot{L}_y(t) = -q E_0 x(t); \quad (192)$$

$$\begin{aligned} L_x(t) &= L_x(0) + q E_0 \int_0^t dt y(t) = \\ &= L_x(0) + q E_0 t y(0) + \frac{1}{2} \frac{q E_0}{m} t^2 p_y(0); \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} L_y(t) &= L_y(0) - q E_0 \int_0^t dt x(t) = \\ &= L_y(0) - q E_0 t x(0) - \frac{1}{2} \frac{q E_0}{m} t^2 p_x(0). \end{aligned} \quad (194)$$

v)

$$\langle L_z(t) \rangle = 0, \quad \langle L_x(t) \rangle = 0, \quad \langle L_y(t) \rangle = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{m} q E_0 t^2 \quad (195)$$

Le condizioni iniziali erano:

$$\langle \mathbf{r}(0) \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{p}(0) \rangle = p_0 \mathbf{x}; \quad \langle \mathbf{L}(0) \rangle = 0. \quad (196)$$

14.4 5.4 Oscillatore e spin

(i) Visto che s_z commuta con H possiamo prendere gli autostati di s_z come base di autosati di H . Per gli stati di spin up, H descrive un oscillatore armonico H_0 , con

$$E_n = \omega \hbar (n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \psi_n(x) = C_n H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}; \quad (197)$$

per stati di spin down, il systema descrive una particella libera $H^{(free)} = \frac{p^2}{2m}$, per cui

$$E_p = \frac{p^2}{2m}, \quad -\infty < p < \infty, \quad \psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i p x/\hbar}. \quad (198)$$

(ii) No, perché esso non è un autostato di s_z . Il valor medio di H è

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \frac{1}{2} [\langle \psi_0 | H_0 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | H^{(free)} | \psi_0 \rangle] = \\ &= \frac{1}{2} [\frac{1}{2} \omega \hbar + \langle \psi_0 | H_0 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 | \psi_0 \rangle] = \frac{1}{2} [\frac{1}{2} \omega \hbar + \frac{1}{4} \omega \hbar] = \frac{3}{8} \omega \hbar. \end{aligned} \quad (199)$$

(iii) La parte di spin up, essendo un autofunzione di H_0 , evolve semplicemente

$$\psi_0(x) |\uparrow\rangle \rightarrow e^{-iE_0 t/\hbar} \psi_0(x) |\uparrow\rangle, \quad E_0 = \frac{1}{2} \omega \hbar. \quad (200)$$

L'evoluzione della parte di spin down è

$$\psi_0(x) |\downarrow\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{ikx} |\downarrow\rangle \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{-i\frac{k^2 \hbar t}{2m}} e^{ikx} |\downarrow\rangle \quad (201)$$

Se scriviamo

$$\psi_0 = N e^{-Ax^2}, \quad N = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}, \quad A = \frac{m\omega}{2\hbar}, \quad (202)$$

si ha, utilizzando la (28):

$$a(k) = \frac{N}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-k^2/4A}. \quad (203)$$

La funzione d'onda a $x = 0$ al tempo t è

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{-\frac{k^2 \hbar t}{2m}} = \frac{N}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2/4A} e^{-i\frac{k^2 \hbar t}{2m}} = \frac{N}{\sqrt{1+i\omega t}}. \quad (204)$$

Perciò

$$\psi(0, t) = \frac{N}{\sqrt{2}} [e^{-i\omega t/2} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{1+i\omega t}} |\downarrow\rangle]. \quad (205)$$

La funzione d'onda di spin normalizzata è

$$\psi(0, t) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}{1+\sqrt{1+\omega^2 t^2}}} [e^{-i\omega t/2} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{1+i\omega t}} |\downarrow\rangle]. \quad (206)$$

la probabilità richiesta è

$$P_- = \frac{1}{1+\sqrt{1+\omega^2 t^2}}. \quad (207)$$

14.5 5.5 Decadimento e parità

(i)

$$S = 1, 0, \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (208)$$

L'unica combinazione consistente con la statistica di Fermi-Dirac (funzione d'onda antisimmetrica) e con $J = 1$ è

$$S = 1, \quad \ell = 1. \quad (209)$$

(ii)

$$P = (-)^{\ell} \quad (210)$$

per cui $P = -1$.

(iii)

$$\begin{aligned} \psi &= R(r) \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{1,-1} - Y_{1-1}(\theta, \phi) \chi_{1,1}] \\ &= R(r) \frac{-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} [\sin \theta e^{i\phi} |\downarrow\downarrow\rangle + \sin \theta e^{-i\phi} |\uparrow\uparrow\rangle] \end{aligned} \quad (211)$$

n	L	J	F	Energia	Grad. Degener.
1	0	$\frac{1}{2}$	0, 1	$E_1^{(0)}$	4
2	0	$\frac{1}{2}$	0, 1	$E_2^{(0)}$	4
2	1	$\frac{1}{2}$	0, 1	$E_2^{(0)} - A$	4
2	1	$\frac{3}{2}$	1, 2	$E_2^{(0)} + \frac{1}{2}A$	8

Tabella 1:

(iv)

$$\psi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{i\phi} |\downarrow\downarrow\rangle + e^{-i\phi} |\uparrow\uparrow\rangle] \quad (212)$$

v) 1/2

vi) L'autostato con $s_y(1) = 1/2, s_y(2) = 1/2$ è

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (213)$$

La probabilità richiesta è

$$|\langle\psi_1|\psi_{spin}\rangle|^2 = \frac{\sin^2\phi}{2} \quad (214)$$

15 [6] Soluzioni per Capitolo 6

15.1 6.1 Interazione spin orbita

(i) La degenerazione del livello n è $4n^2$, con energia

$$E_n^{(0)} = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2 n^2}. \quad (215)$$

(ii)

$$H_{S-O} = A \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_e = \frac{1}{2} A [\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}_e^2] = \frac{1}{2} A [J(J+1) - L(L+1) - \frac{3}{4}]. \quad (216)$$

da cui segue il risultato in Tabella 1.

(iii)

$$\begin{aligned} H &= H_0 + A \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_e + B \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_e \\ &= H_0 + \frac{A}{2} [\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}_e^2] + \frac{B}{2} [\mathbf{S}^2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}] \end{aligned} \quad (217)$$

Gli stati $|L, J, F, F_z\rangle$ della Tabella 1. in generale non sono autostati di H totale, perché \mathbf{J}^2 non commuta con \mathbf{S}^2 , ma questo non esclude che lo siano alcuni di essi. Questo accade quando i valori di L e F determinano univocamente anche il valore di S , dove

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_p; \quad \mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (218)$$

Dalla regola di composizione dei momenti angolari, si ha il risultato riportato nella Tabella 2.

n	L	J	F	S	Energia	Grad. Degener.
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$E_1^{(0)} - \frac{3B}{4}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$E_1^{(0)} + \frac{B}{4}$	3
2	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$E_2^{(0)} - \frac{3B}{4}$	1
2	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$E_2^{(0)} + \frac{B}{4}$	3
2	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$E_2^{(0)} - A + \frac{B}{4}$	1
2	1	$\frac{3}{2}$	2	1	$E_2^{(0)} + \frac{A}{2} + \frac{B}{4}$	5

Tabella 2:

15.2 6.2 Deutone

(i)

$$\mu = 129.9, \quad \frac{r'_B}{r_B} = \frac{m_e}{\mu} = \frac{0.51}{129.9} = 0.0039. \quad (219)$$

L'energia di legame è uguale a

$$\frac{e^2}{2r'_B} = \frac{e^2}{2r_B} \frac{r_B}{r'_B} = \frac{13.6}{0.0039} = 3487 \text{ eV} = 3.49 \text{ KeV}. \quad (220)$$

(ii) Visto che $\ell = 0$, $s_\pi = 0$, il momento angolare dello stato iniziale è 1. Gli stati possibili di momento angolare dello stato finale, permessi dalla statistica di Fermi-Dirac sono: (a) $S = 0$, $L = 0, 2, 4, \dots$, o (b) $S = 1$, $L = 1, 3, 5, \dots$. L'unica combinazione compatibile con $J_{tot} = 1$ è $[S = 1, L = 1]$. La parità dello stato finale è perciò $-$, che deve essere uguale a

$$P_\pi (-)^0 = P_\pi \quad (221)$$

parità dello stato iniziale. La parità intrinseca di π^- è stata determinata storicamente così.

(iii) Con $J_z = 0$, lo stato iniziale è nello stato $(J, J_z) = (1, 0)$. In termini di stati di spin e del momento orbitale finale,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle |1, -1\rangle - |1, -1\rangle |1, 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{1,1}(\theta, \phi) \chi_{1,-1} - Y_{1,-1}(\theta, \phi) \chi_{1,1}] \quad (222)$$

La distribuzione angolare è

$$P d\Omega = \frac{3}{8\pi} \sin^3 \theta d\theta d\phi, \quad (223)$$

$$\int P d\Omega = 1. \quad (224)$$

15.3 6.3 Effetto Mössbauer

(i) $E_\gamma = G$.

(ii) Supponiamo che il fotone porti l'impulso, $p = k\hbar$. Per rinculo, il nucleo acquista impulso, $-p = -k\hbar$. L'energia cinetica del nucleo è allora

$$\frac{k^2 \hbar^2}{2M}, \quad (225)$$

e la conservazione di energia richiede (l'energia del fotone essendo $E_\gamma = pc$):

$$k\hbar c + \frac{k^2 \hbar^2}{2M} = G, \quad (226)$$

oppure

$$E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2 M c^2} = G. \quad (227)$$

Risolvendo approssimativamente questa equazione si trova che

$$E_\gamma \simeq G - \frac{G^2}{2 M c^2} + \dots \quad (228)$$

dove le correzioni di ordini più alti in G/Mc^2 sono state trascurate.

- (iii) Per ipotesi il rinculo del centro di massa dell'oscillatore è trascurabile. L'unica maniera in cui l'energia del fotone può essere diminuita è l'eccitazione dell'oscillatore, perciò

$$G = E_\gamma + E_f - E_i, \quad E_\gamma = G - \omega \hbar N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (229)$$

dove N è il livello di energia

$$E_{osc} = \omega \hbar \left(\frac{3}{2} + n_1 + n_2 + n_3 \right) = \omega \hbar \left(\frac{3}{2} + N \right), \quad (230)$$

in cui si trova il nucleo dopo l'emissione.

- (iv) $e^{i k z}$ è un operatore che trasla l'impulso del nucleo di $(0, 0, -k \hbar)$, che è l'effetto della conservazione dell'impulso. Perciò

$$P_N = |\langle \psi_f | e^{i k z} | \psi_0 \rangle|^2 = |\langle N | e^{i k z} | 0 \rangle|^2, \quad k \hbar c = G - \omega \hbar N. \quad (231)$$

Nel secondo termine l'elemento di matrice si riferisce ad un oscillatore armonico unidimensionale

$$H = \frac{p_z^2}{2 M} + \frac{M \omega^2}{2} z^2. \quad (232)$$

Per calcolare l'elemento di matrice, scriviamo

$$\langle N | = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | a^N; \quad e^{i k z} = e^{i C (a + a^\dagger)}; \quad C = k \sqrt{\frac{\hbar}{2 M \omega}}. \quad (233)$$

Facendo uso delle identità

$$a e^{i C (a + a^\dagger)} | 0 \rangle = [a, e^{i C (a + a^\dagger)}] | 0 \rangle = i C e^{i C (a + a^\dagger)} | 0 \rangle, \quad (234)$$

$$a^2 e^{i C (a + a^\dagger)} | 0 \rangle = i C a e^{i C (a + a^\dagger)} | 0 \rangle = (i C)^2 e^{i C (a + a^\dagger)} | 0 \rangle, \quad (235)$$

etc., si trova che

$$\langle N | e^{i k z} | 0 \rangle = \frac{(i C)^N}{\sqrt{N!}} \langle 0 | e^{i C (a + a^\dagger)} | 0 \rangle = \frac{(i C)^N}{\sqrt{N!}} e^{-C^2/2}. \quad (236)$$

Nell'ultima uguaglianza è stata usata la formula di Hausdorff-Weyl (valida se $[X, Y]$ è proporzionale all'operatore identità),

$$e^X e^Y = e^{X+Y + \frac{1}{2}[X, Y]}. \quad (237)$$

La probabilità richiesta è dunque

$$P_N = \frac{C^{2N}}{N!} e^{-C^2}. \quad (238)$$

16 [8] Soluzioni per Cap. 8

16.1 8.1 Effetto Zeeman

(i)

$$E_2 = -\frac{e^2}{8r_B}, \quad d = 2 \cdot 4 = 8. \quad (239)$$

$L = 1, 0$. In termini di stati di momento angolare totale, $J = \frac{3}{2}$, (quattro stati), e due doppietti di $J = \frac{1}{2}$.

(ii)

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} = \frac{\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2}{2}. \quad (240)$$

\mathbf{J} , L^2 , s^2 commutano con H . Le degenerazione di ogni livello è dovuta a J_z .

I quattro stati di $(J, L, s) = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ ha l'energia $E_2 + \frac{A}{2}$;

i due stati di $(J, L, s) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ ha l'energia $E_2 - A$;

i due stati di $(J, L, s) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ha l'energia E_2 .

(iii)

$$\Delta H = -\frac{e\hbar}{2mc} (L_z + 2s_z) B. \quad (241)$$

Perciò in questo caso, i numeri quantici buoni sono \mathbf{L}^2 , L_z , \mathbf{s}^2 e s_z .

L	L_z	s_z	ΔE (in unità di $\frac{e\hbar B}{2mc}$)
1	1	$+\frac{1}{2}$	-2
1	1	$-\frac{1}{2}$	0
1	0	$+\frac{1}{2}$	-1
1	0	$-\frac{1}{2}$	+1
1	-1	$+\frac{1}{2}$	0
1	-1	$-\frac{1}{2}$	+2
0	0	$+\frac{1}{2}$	-1
0	0	$-\frac{1}{2}$	+1

Tabella 3:

Il livello $n = 2$ si separa in cinque sottolivelli. Le energie sono

$$E = E_2 + 2\frac{e\hbar B}{2mc} \quad (\text{singolo}), [L = 1, L_z = -1, s_z = -\frac{1}{2}];$$

$$E = E_2 + \frac{e\hbar B}{2mc} \quad (\text{doppio}), [L = 1, L_z = 0, s_z = -\frac{1}{2}] \text{ e } [L = 0, L_z = 0, s_z = -\frac{1}{2}];$$

$$E = E_2 \quad (\text{doppio}), [L = 1, L_z = 1, s_z = -\frac{1}{2}] \text{ e } [L = 1, L_z = -1, s_z = \frac{1}{2}];$$

$$E = E_2 - \frac{e\hbar B}{2mc} \quad (\text{doppio}), [L = 1, L_z = 0, s_z = \frac{1}{2}] \text{ e } [L = 0, L_z = 0, s_z = \frac{1}{2}];$$

$$E = E_2 - 2\frac{e\hbar B}{2mc} \quad (\text{singolo}), [L = 1, L_z = 1, s_z = \frac{1}{2}].$$

(iv)

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle |\uparrow\rangle \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle |\downarrow\rangle - e^{-i\Delta E t/\hbar} \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle |\uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (242)$$

nella seconda riga abbiamo trascurato la fase globale, $e^{-iE_2 t/\hbar}$, e

$$\Delta E = -\frac{e\hbar B}{2mc} \quad (243)$$

dal punto (iii).

Riesprimendo (242) in termini di stati di momento angolare totale, si ha

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right] - e^{\frac{i e B t}{2 m c}} \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} (1 - e^{\frac{i e B t}{2 m c}}) \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{\frac{i e B t}{2 m c}} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (244)$$

$$P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \left| \frac{\sqrt{2}}{3} (1 - e^{\frac{i e B t}{2 m c}}) \right|^2 = \frac{8}{9} \sin^2 \frac{e B t}{4 m c}; \quad (245)$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \left| \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{\frac{i e B t}{2 m c}} \right) \right|^2 = \frac{1}{9} (5 + 4 \cos \frac{e B t}{2 m c}) = 1 - \frac{8}{9} \sin^2 \frac{e B t}{4 m c}. \quad (246)$$

16.2 8.2 Livelli di Landau

(i) L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} = \frac{(p_x - \frac{eB}{c} y)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (247)$$

Poiché H commuta con p_x , è possibile costruire gli autosati di H ponendo

$$\Psi(x, y) = e^{i p x / \hbar} \psi(y). \quad (248)$$

$\psi(y)$ soddisfa all'equazione

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{(\frac{eB}{c} y - p)^2}{2m} \right] \psi(y) = E \psi(y), \quad (249)$$

che è l'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico lineare, con la frequenza di Larmor

$$\omega = \frac{eB}{mc} \quad (250)$$

e con il centro dell'oscillatore a

$$y = \frac{p c}{e B}. \quad (251)$$

I livelli energetici sono

$$E_n = \omega \hbar (n + \frac{1}{2}) : \quad (252)$$

e sono indipendenti da p . Questo significa che ogni livello n è infinitamente degenere, con valore di p compreso in $-\infty < p < \infty$.

La frequenza $\omega = \frac{eB}{mc}$ corrisponde a quella di un moto circolare per un elettrone classico che entra nel campo magnetico uniforme \mathbf{B} ,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (253)$$

(ii) L'Hamiltoniana in questa gauge è

$$H = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{(p_x - \frac{eB}{2c}y)^2}{2m} + \frac{(p_y + \frac{eB}{2c}x)^2}{2m}. \quad (254)$$

Per semplificare la scrittura, poniamo $\hbar = \frac{eB}{c} = m = 1$. Allora

$$H = \frac{1}{2}(-i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2})^2 + \frac{1}{2}(-i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2})^2. \quad (255)$$

Un bel metodo per risolvere il problema è quello di introdurre le variabili complesse,

$$z \equiv x + iy, \quad \bar{z} \equiv x - iy, \quad (256)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (257)$$

Ovviamente,

$$[z, \partial_z] = [\bar{z}, \partial_{\bar{z}}] = -1, \quad [\bar{z}, \partial_z] = [z, \partial_{\bar{z}}] = 0. \quad (258)$$

($\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$, etc). Definiamo inoltre gli operatori di “creazione” e di “distruzione”,

$$a \equiv \sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}}{4} \right), \quad a^\dagger \equiv \sqrt{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{4} \right): \quad (259)$$

questi soddisfano alla solita regola di commutazione,

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (260)$$

Un conto elementare dimostra che l'Hamiltoniana è semplicemente (!)

$$H = -2\partial_z\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{8}z\bar{z} + \bar{z}\partial_z - z\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = a^\dagger a + \frac{1}{2}. \quad (261)$$

I livelli di Landau (252) seguono immediatamente da questa espressione. Per trovare le funzioni d'onda e le degenerazioni, osserviamo che l'equazione per lo stato fondamentale

$$a\psi_0 = 0 \quad (262)$$

ha infinite soluzioni

$$\psi_{0,m} = C_m \bar{z}^m e^{-\frac{1}{4}\bar{z}z} = C_m (x - iy)^m e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (263)$$

tutte con $E_0 = \frac{\omega\hbar}{2}$, distinte dall'autovalore del momento angolare

$$L = -i(x\partial_y - y\partial_x), \quad (264)$$

$L\psi_{0,m} = m\psi_{0,m}$ (la sola componente del momento angolare in un piano). L commuta con H .

Infine, gli stati eccitati possono essere costruiti agendo a^\dagger ripetutamente su ciascuna funzione $\psi_{0,m}$:

$$\psi_{N,m} = \frac{1}{\sqrt{N!}}(a^\dagger)^N \psi_{0,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (265)$$

Nella gauge simmetrica l'elettrone è localizzato sia in x che in y , mentre nella gauge, $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$, esso è localizzato solo in y .

Domanda: Qual'è la gauge in cui l'elettrone è localizzato attorno ad un punto (x_0, y_0) ?

17 [9] Soluzioni per Cap. 9

17.1 9.1 Oscillatore

Per eliminare il termine $xp + px$ basta considerare la trasformazione unitaria

$$p \rightarrow \hat{p} = p + \gamma x; \quad x \rightarrow \hat{x} = x, \quad \gamma \text{ reale.} \quad (266)$$

(Per un trattamento più generale vedi Nota 1.) Si noti che tale trasformazione conserva la relazione di commutazione canonica,

$$[x, \hat{p}] = [x, p] = i\hbar, \quad (267)$$

ed è infatti generata dall'operatore unitario,

$$p \rightarrow \hat{p} = UpU^\dagger; \quad x \rightarrow UxU^\dagger, \quad (268)$$

con $U = \exp -i(\gamma/2\hbar)x^2$. (Alternativamente, la (266) può essere trattata come un semplice cambiamento delle variabili.) L'Hamiltoniana si trasforma come

$$H(x, p) \rightarrow \hat{H} = UH(x, p)U^\dagger = H(\hat{x}, \hat{p}) = H(x, p + \gamma x), \quad (269)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{(p + \gamma x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + g\frac{\omega}{2}(x(p + \gamma x) + (p + \gamma x)x) \\ &= \frac{p^2}{2m} + (g\frac{\omega}{2} + \frac{\gamma}{2m})(xp + px) + (\frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{\gamma^2}{2m} + g\omega\gamma)x^2 : \end{aligned} \quad (270)$$

per risolvere il problema basta porre

$$g\frac{\omega}{2} + \frac{\gamma}{2m} = 0 : \quad (271)$$

i.e.,

$$\gamma = -gm\omega. \quad (272)$$

L'Hamiltoniana diventa:

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1 - g^2)x^2. \quad (273)$$

Questa rappresenta un oscillatore armonico con la frequenza angolare

$$\omega' = \omega\sqrt{1 - g^2}, \quad (274)$$

(reale per $|g| < 1$). Lo spettro esatto (che non dipende dalla rappresentazione) è dunque discreto,

$$E_n = \sqrt{1 - g^2} \omega \hbar (n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (275)$$

ogni livello è singolo.

Si noti che per $|g| > 1$ il sistema è instabile: non ci sono stati legati e lo spettro è continuo, $-\infty < E < \infty$. Anche per $|g| = 1$ lo spettro è continuo, ma in questo caso il sistema è equivalente ad una particella libera, perciò $0 \leq E < \infty$. (Vedi Nota 2).

Confronto con il caso classico:

Le equazioni canoniche per l'Hamiltoniana classica

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + g\omega xp \quad (276)$$

sono

$$\frac{d}{dt}x = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + g\omega x \quad (277)$$

$$\frac{d}{dt}p = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x - g\omega p, \quad (278)$$

da cui segue l'equazione per un oscillatore armonico di pulsazione $\omega\sqrt{1-g^2}$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2(1-g^2)x = 0. \quad (279)$$

Per $g^2 > 1$ le soluzioni sono divergenti. Per $g^2 < 1$ H descrive un oscillatore armonico di pulsazione $\omega\sqrt{1-g^2}$. Per $g^2 = 1$ si ha l'equazione di una particella libera. Questi risultati si ritrovano nel caso quantistico.

Si noti che (sia nel caso classico sia in quello quantistico) il sistema non descrive un oscillatore armonico sottoposto ad una forza viscosa, come potrebbe far pensare il contributo proporzionale alla velocità nella espressione della "forza"

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2 x - g\omega p. \quad (280)$$

La forza viscosa, essendo non conservativa, non deriva da un potenziale.

17.2 9.2 Oscillatore anarmonico

(i) Usando

$$\langle x^4 \rangle_0 = 3\langle x^2 \rangle_0^2; \quad \langle p^2 \rangle_0 = \frac{\hbar^2}{4\langle x^2 \rangle_0^2}; \quad \langle x^2 \rangle_0^2 = \sigma^{-1}, \quad (281)$$

si ha

$$\langle E \rangle_0 = \frac{\hbar^2}{8m}\sigma + \frac{3\alpha}{\sigma^2}. \quad (282)$$

(ii)

$$\frac{d\langle E \rangle_0}{d\sigma} = \frac{\hbar^2}{8m} - \frac{6\alpha}{\sigma^3} = 0, \quad \therefore \sigma = \sigma_0 = \left(\frac{48m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \quad (283)$$

$$\rightarrow E_0 = \frac{3^{4/3}}{4} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{2/3} \alpha^{1/3}. \quad (284)$$

N.B. Per $\alpha = 5$, $m = \hbar = 1$, si trova in questo modo $E_0 \simeq 1.165$, da paragonare con il risultato esatto $E_0 = 1.14224\dots$ ($\sim 2\%$)

(iii)

$$\langle x^4 \rangle_1 = \langle x^6 \rangle_0^2 \sigma = \frac{15}{\sigma^2}; \quad (285)$$

$$\langle p^2 \rangle_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \hbar^2 \left(\frac{d\psi_1}{dx} \right)^2 \quad (286)$$

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx} \right)^2 = \sigma \left(1 + \frac{\sigma^2 x^4}{4} - \sigma x^2 \right) \psi_0^2 \quad (287)$$

$$\langle p^2 \rangle_1 = \hbar^2 \sigma \left(1 + \frac{\sigma^2 \langle x^4 \rangle_0}{4} - \sigma \langle x^2 \rangle_0 \right) = \frac{3}{4} \hbar^2 \sigma. \quad (288)$$

$$\langle E \rangle_1 = \frac{3}{4} \frac{\hbar^2 \sigma}{2m} + \frac{15\alpha}{\sigma^2}. \quad (289)$$

$$\frac{d\langle E \rangle_1}{d\sigma} = \frac{3\hbar^2}{8m} - \frac{30\alpha}{\sigma^3} = 0, \quad \therefore \sigma = \sigma_1 = \left(\frac{80 m \alpha}{\hbar^2} \right)^{1/3} \quad (290)$$

$$\rightarrow E_1 = \frac{9}{4} 5^{1/3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{2/3} \alpha^{1/3} \simeq 3.847 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{2/3} \alpha^{1/3}. \quad (291)$$

N.B. Per $\alpha = 5$, $m = \hbar = 1$, questo dà $E_1 \simeq 4.144$, da paragonare con il risultato esatto $E_0 = 4.09307\dots$ ($\sim 1\%$)

(iv) La (41) non ha nodi ed è pari; la (42) ha un nodo ed è dispari.

18 [10] Soluzioni per Cap. 10

18.1 10.1 Interferenza gravitazionale

(i) $\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$.

(ii) La funzione d'onda del neutrone acquisterà fasi differenti lungo i cammini $ABCEF$ e $ABDEF$, ciò non è dovuto alle diverse lunghezze dei percorsi (che sono identiche), ma alla differenza della lunghezza d'onda di de Broglie del neutrone. Infatti, a causa del potenziale gravitazionale, $V = Mgz$, nei tratti orizzontali CE o BD il numero d'onda ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$) è dato da

$$k_{CE} = \frac{\sqrt{2M(E - Mgh)}}{\hbar}; \quad k_{BD} = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}; \quad (292)$$

la differenza è

$$\Delta k = k - k(1 - \frac{Mgh_0}{E})^{1/2} \simeq \frac{M^2 g h_0}{k \hbar^2}. \quad (293)$$

Questo induce la differenza di fase nella funzione d'onda

$$\Delta\Phi = L \Delta k = \frac{M^2 g h_0 L \lambda}{2\pi \hbar^2} \quad (294)$$

(iii)

$$\frac{M^2 g h_0 L \lambda}{2\pi \hbar^2} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (295)$$

(iv) Al variare di ϕ , l'altezza del tragitto CE va da h_0 fino a $h_0 \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Usando la formula precedente, il numero di volte che i due percorsi danno le due componenti della funzione d'onda in fase (interferenza massima e perciò l'intensità massima) è

$$\mathcal{N} = \frac{M^2 g h_0 L \lambda}{(2\pi)^2 \hbar^2} = \frac{Mg(h_0 L)}{2\pi \hbar v} \simeq \frac{1.798}{2\pi 3} \simeq 8.8 \quad (296)$$