La violazione delle disuguaglianze di Bell e la non separabilità in meccanica quantistica

Si consideri una coppia di particelle non identiche di spin 1/2 che vengono prodotte nello stato di singoletto e quindi con funzione d'onda

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_2|+\rangle_1)\psi(q_1, q_2)$$

dove

$$\psi(q_1, q_2) = \psi_1(q_1)\psi_2(q_2)$$

rappresentano due pacchetti d'onda che si allontanano in direzione opposta.

Dopo che i due pacchetti si sono allontanati a grande distanza si effettua la misura di $s_z^{(1)}$. Sappiamo che i risultati possibili sono $+1/2$ e $-1/2$ che indicheremo is seguito come $+$ e $-$. La probabilità di ottenere tali risultati sono $\langle s|P_1^+|s\rangle$ e $\langle s|P_1^-|s\rangle$ dove $P_1^+ = |+\rangle_1\langle+|_1$ e $P_1^- = |-\rangle_1\langle-|_1$. Secondo i principi della misura se si ottiene come risultato $+$ lo stato del sistema dopo la misura è rappresentato dal vettore $P_1^+|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_1|-\rangle_2\psi(q_1, q_2)$ che per effettuare ulteriori calcoli va normalizzato ad 1. Se ora si esegue una misura di $s_z^{(2)}$ si ottiene con sicurezza, cioè con probabilità 1 il valore $-$. Dato che quando si è effettuata la misura di $s_z^{(1)}$ sulla particella 1 tale particella, cioè il contatore 1, era molto distante dalla particella 2 è ragionevole ammettere che tale processo di misura non abbia influenzato il sistema "particella 2". Possiamo quindi asserire secondo EPR (Einstein, Podolsky, Rosen) che esiste un elemento di realtà fisica che corrisponde alla quantità fisica $s_z^{(2)}$. In altre parole dato che durante il processo di misura di 1 non abbiamo disturbato la particella 2, c'è da ritenere che la particella 2 avesse il valore $-$ per $s_z^{(2)}$ anche prima della misura dello spin della particella 1.

Infatti il criterio di EPR è il seguente: "Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza (cioè con probabilità uguale ad 1) il valore di una quantità fisica allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale quantità fisica". Secondo EPR questo è un criterio sufficiente di realtà.

Questo induce a ritenere che la descrizione dello stato mediante il vettore $|s\rangle$ non è completa perché tale valore – per lo $s_z^{(2)}$ della particella 2 pur avendo una realtà fisica non è prevedibile dalla struttura dello stato $|s\rangle$. Appare quindi che il vettore di stato da una descrizione del sistema di carattere statistico incompleto come e.g. in meccanica statistica classica la funzione densità $\rho(q,p)$ nello spazio delle fasi dà una descrizione incompleta di un sistema fisico classico.

Queste considerazioni possono mettere in dubbio la completezza della meccanica quantistica come teoria; non mettono in dubbio la correttezza delle previsioni, di carattere in generale statistico, della meccanica quantistica.

Nondimeno J.S. Bell nel 1964 ha dimostrato che le previsioni della meccanica quantistica violano in maniera quantitativa, certe relazioni imposte dalla idea di realtà data da EPR (che è raffinamento della comune idea di realtà, cioè di qualcosa che esiste indipendentemente dall'osservatore) accoppiate al requisito della località. Quindi mentre la critica di EPR lascia aperta la possibiltà di un completamento (anzi lo auspica e lo ritiene possibile) della meccanica quantistica nel senso di una teoria realistica locale, l'analisi di Bell nega questa possibiltà.

Gli esperimenti hanno confermando le previsioni della meccanica quantistica.

La disuguaglianza di Clauser-Holt-Horne-Shimony

La analisi secondo lo schema realistico locale più generale dell'esperimento descritto sopra è la seguente: L'apparato preparatore preparerà una coppia di sistemi con caratteristiche descritte da un parametro λ che sarà di volta in volta diverso con una distribuzione di probabilità $f(\lambda)$.

Conviene considerare il seguente prodotto di differenze di probabilità

$$(P_1(\text{yes}, a, \lambda) - P_1(\text{no}, a, \lambda)) \times (P_2(\text{yes}, b, \lambda) - P_2(\text{no}, b, \lambda))$$

dove $P_1(\text{yes}, a, \lambda)$ è la probabilità che si trovi la risposta "yes" quando il sistema 1 emesso dall'apparato di produzione con caratteristica λ entra nel contatore 1 disposto sulla caratteristica a (e.g. orientamento) e via dicendo.

Conviene porre

$$A_1(a, \lambda) = P_1(\text{yes}, a, \lambda) - P_1(\text{no}, a, \lambda)$$

$$A_2(b, \lambda) = P_2(\text{yes}, b, \lambda) - P_2(\text{no}, b, \lambda)$$

e dato che le probabilità sono numeri positivi compresi tra 0 ed 1 si ha

$$|A_i(b, \lambda)| \leq 1$$

Si considera ora il valor medio del prodotto di sopra, cioè

$$E(a, b) = \int d\lambda f(\lambda) A_1(a, \lambda) A_2(b, \lambda) =$$

$$= \int d\lambda f(\lambda)(P_1(\text{yes}, a, \lambda) - P_1(\text{yes}, a, \lambda))(P_2(\text{yes}, b, \lambda) - P_2(\text{yes}, b, \lambda)) =$$

$$= P(\text{yes}, a, \text{yes}, b) + P(\text{no}, a, \text{no}, b) - P(\text{yes}, a, \text{no}, b) - P(\text{no}, a, \text{yes}, b)$$

Si ha

$$E(a, b) + E(a, b') = \int d\lambda f(\lambda) A_1(a, \lambda)(A_2(b, \lambda) + A_2(b', \lambda))$$

e quindi

$$|E(a, b) + E(a, b')| \leq \int d\lambda f(\lambda) |A_2(b, \lambda) + A_2(b', \lambda)|$$

e cambiando setting dei contatori e prendendo la differenza invece che la somma

$$|E(a',b) - E(a',b')| \leq \int d\lambda f(\lambda) |A_2(b,\lambda) - A_2(b',\lambda)|$$

e sommando

$$|E(a,b) + E(a,b')| + |E(a',b) - E(a',b')| \leq$$

$$\int d\lambda f(\lambda) |A_2(b,\lambda) + A_2(b',\lambda)| + |A_2(b,\lambda) - A_2(b',\lambda)| \leq 2$$

dato che

$$|A_2(b,\lambda) + A_2(b',\lambda)| + |A_2(b,\lambda) - A_2(b',\lambda)| \leq 2.$$

Questo vale per qualunque coppia di sistemi 1 e 2 prodotti e per qualunque tipo di contatori 1 e 2. Si noti che questa disuguaglianza si applica anche se la teoria fondamentale fosse di natura statistica ma locale. Infatti il risultato della misura del sistema 1 da parte del contatore 1 è descritta dalla funzione di probabiltà $P_1(x,a,\lambda)$. Quindi il sistema 1 porta con se il ricordo λ di come è stato, anche casualmente, prodotto ma il risultato della misura da parte del contatore 1 non è necessariamente univoco.

970520

Violazione della disuguaglianza di Bell (CHHS) in meccanica quantistica

Si consideri lo stato

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2).$$

Specifichiamo l'esperimento come segue: il sistema prodotto è quello descritto all'inizio del primo paragrafo; i due contatori sono dei polarimetri alla Stern-Gerlach. x è l'asse lungo cui sono disposti i due contatori e l'apparato produttore del sistema. I parametri a e b dei contatori 1 e 2 sono gli angoli di cui sono stati ruotati i due polarimetri attorno l'asse x, rispetto alla posizione di riferimento z. Yes significa che si e' misurato $+$, no significa che si è misurato $-$.

Dato che $|s\rangle$ è invariante sotto rotazioni per quanto riguarda il vettore di spin, $P(\cdot\ a; \cdot\ b)$ può dipendere solo dalla differenza dei due angoli b e a. Abbiamo

$$P(\text{yes } a; \text{yes } b) = |\langle s|[\cos(\frac{b-a}{2}) - i\sigma_x^{(2)} \sin(\frac{b-a}{2})]|+\rangle_1|+\rangle_2|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{b-a}{2}) = P(\text{no } a; \text{no } b)$$

e similmente si trova

$$P(\text{yes } a; \text{no } b) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{b-a}{2}) = P(\text{no } a; \text{yes } b) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{b-a}{2})$$

Veniamo ora agli E.

$$E(a,b) = 2\sin^2(\frac{b-a}{2}) - 1$$

Prenderemo $a = 0$, $a' = \pi/2$, $b = \pi/4$, $b' = -\pi/4$ cioè il singolo contatore può assumere due posizioni una ortogonale all'altra; le posizioni del contatore 2 sono ruotare di mezzo angolo retto rispetto a quelle del contatore 1.

Consideriamo la combinazione

$$|E(a,b) + E(a,b')| + |E(a',b) - E(a',b')| = 2(1 + \sin^2(3\pi/8) - 3\sin^2(\pi/8)) =$$

$$= 3\cos(\pi/4) - \cos(3\pi/4) = 2\sqrt{2} > 2 \quad (!)$$

che viola la disuguaglianza di CHHS. Questo dimostra che la meccanica quantistica prevede correlazioni superiori a quelle che ci possono attendere da una qualunque teoria realistica locale. Se si rilassa in principio di località è facile mostrare con degli esempi che la disuguaglianza di CHHS non è più valida.

I risultati della meccanica quantistica, confermati dagli esperimenti, ci insegnano che, come sostenuto da Bohr, le due particelle 1 e 2 per quanto separati spazialmente siano i due pacchetti d'onda $\psi_1(q_1)$ e $\psi_2(q_2)$, non possono essere considerate come due sistemi indipendenti ma devono essere considerate come un unico sistema; questo fino a che non si esegue una operazione di misura. Gli esperimenti possono essere eseguiti anche "fuori del cono luce" cioè in modo da poter escludere, secondo il principio di relativitá, una trasmissione di informazione tra il contatore 1 e il contatore 2 il che invaliderebbe la dimostrazione della disuguaglianza di CHHS. Malgrado ciò Bell ha dimostrato, nell'ambito della teoria quantistica dei campi, che tali correlazioni (superiori a quelle che ci si può attendere da una qualunque teoria locale realistica) non permettono di trasmettere informazione con velocità superiore a quella della luce (impossibilità di costruire un telegrafo superluminale). Alla base di questa impossibiltà sta il carattere statistico della relazione tra il vettore di stato e i risultati di un esperimento. Disuguaglianze ancora più stringenti, e che sono violate dalle predizioni della meccanica quantistica, si possono dedurre studiando correlazioni triple (Mermin).

Bibliografia

A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: Phys. Rev. 47 (1935) 777.

B. d'Espagnat: The quantum theory and reality. Scientific American p.128 November 1979.

J.S. Bell : Speakable and Unspeakable in quantum mechanics. Cambridge University Press. (1987).

B. d'Espagnat: A la Recherche du Reel. Gauthier Villar 1979.

N.D. Mermin: Quantum misteries revisited. Am. J. Phys. 58 (1990) 731.

010530