Descrizione dei sistemi composti

Premessa: Se A e B sono osservabili compatibili possiamo scrivere per ogni $\psi \in \mathcal{H}$

$$\psi = \sum_{ijm} c_{ij}^m \psi_{ij}^m$$

dove ψ_{ij}^m sono autostati di A al valore a_i e di B al valore b_j, ed m tiene conto della eventuale degenerazione residua.

$$\sum_m c_{ij}^m \psi_{ij}^m$$

è un autostato di A al valore to a_i e autostato di B al valore b_j. Quindi possiamo riscrivere

$$\psi = \sum_{ij} c_{ij} \psi_{ij}$$

dove ψ_{ij} sono autostati di A e di B relativi a differenti coppie di valori a_i, b_j.

Ripetendo il ragionamento sulla positività delle probabilità fatti per una osservabile si ha che

$$\mathrm{Prob}_{AB}^{(ij)}(\psi) = |c_{ij}|^2 = |(\psi_{ij}, \psi)|^2$$

Veniamo ora ai sistemi composti. Come in meccanica classica, molto frequentemente ci si trova di fronte ad un sistema che è la composizione di due sottosistemi.

Sia il sistema S descritto dallo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_S$ ed il sistema M dallo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_M$.

Vogliamo giustificare il seguente assioma: Lo spazio di Hilbert che descrive il sistema composto $S + M$ è dato dallo spazio di Hilbert prodotto tensoriale $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$.

Consideriamo il caso in cui i due sistemi sono preparati indipendentemente. Si ha

$$\mathrm{Prob}_A^{(i)}(\psi_S)\mathrm{Prob}_B^{(j)}(\psi_M) = \mathrm{Prob}_{AB}^{(ij)}(\psi_S\psi_M) = |(\psi_{Ai}, \psi_S)|^2 |(\psi_{Bj}, \psi_M)|^2 \tag{1}$$

Il prodotto tensore è definito considerando le coppie di vettori, uno di $\mathcal{H}_S$ e l'altro di $\mathcal{H}_M$ e le loro combinazioni lineari. Si ammette che il prodotto di due vettori sia bilineare nei vettori componenti. Il prodotto scalare di due coppie di vettori è definito come il prodotto dei due prodotti scalari in $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_M$

$$(\psi_{S1}\psi_{M1}, \psi_{S2}\psi_{M2}) = (\psi_{S1}, \psi_{S2})(\psi_{M1}, \psi_{M2})$$

che viene esteso per lineartà a tutti i vettori. Il prodotto del vettore nullo di $\mathcal{H}_S$ e di un qualunque vettore di $\mathcal{H}_M$ (e viceversa) è definito come il vettore nullo nello spazio prodotto. Si verifica che questo spazio è uno spazio pre-hilbertiano. Il suo completamento è lo spazio hilbertiano $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ prodotto tensore di $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_M$

Si può definire l'azione di operatori agenti in $\mathcal{H}_S$ sul prodotto tensore come segue

$$A(\psi_S\psi_M) = (A\psi_S)\psi_M$$

e lo stesso per gli operatori B che agiscono su $\mathcal{H}_M$. Si ha

$$[A, B] = 0$$

e quindi due osservabili A e B relative a sottosistemi diversi sono sempre compatibili.

$$A\psi^m_{Ai}\psi^n_{Bj} = a_i\psi^m_{Ai}\psi^n_{Bj}$$

$$B\psi^m_{Ai}\psi^n_{Bj} = b_j\psi^m_{Ai}\psi^n_{Bj}$$

Dato che ψ^m_{Ai} è un insieme completo in $\mathcal{H}_S$ e ψ^n_{Bj} è un insieme completo in $\mathcal{H}_M$ abbiamo che

$$\psi^m_{Ai}\psi^n_{Bj}$$

è un insieme completo in $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ Possiamo riscrivere il risultato (1) come

$$\mathrm{Prob}^{(i)}_A(\psi_S)\mathrm{Prob}^{(j)}_B(\psi_M) = \mathrm{Prob}^{(ij)}_{AB}(\psi_S\psi_M)) = |(\psi_{Ai}\psi_{Bj}, \psi_S\psi_M)|^2$$

Funzioni d'onda.

Se q_k è un insieme completo di osservabili compatibili in $\mathcal{H}_S$ e Q_k un insieme completo di osservabili compatibili in H_M si ha che $\psi_q \psi_Q$ è un insieme completo nell spazio prodotto tensore e

$$(\psi_q \psi_Q, \psi_S \psi_M) = (\psi_q, \psi_S)(\psi_Q, \psi_M)$$

cioè la funzione d'onda di $\psi_S \psi_M$ è il prodotto delle funzioni d'onda. Questo però accade solo per stati fattorizzati. La funzione d'onda di uno stato generico sarà una generica funzione di q e Q cioè $\Psi(q, Q)$.

051027