Il principio di corrispondenza

Cerchiamo nello spazio degli operatori una operazione che abbia le stesse proprietà delle parentesi di Poisson classiche, cioè una operazione binaria (A, B) che induca sullo spazio degli operatori un'algebra di Lie.

Sviluppando

$$(A_i A_j, B_i B_j)$$

in due ordini diversi usando la regola di Leibniz si ottiene [1]

$$[A_i, B_i](A_j, B_j) = (A_i, B_i)[A_j, B_j]$$

per qualunque scelta degli operatori A_k B_k. Definito

$$[L] = \sum_i a_i [A_i, B_i]$$

$$(L) = \sum_i a_i (A_i, B_i)$$

si ottiene

$$[L](A_j, B_j) = (L)[A_j, B_j]$$

$$[L](L) = (L)[L]$$

Hp. Esiste un $[L]$ che possiede inverso $[L]^{-1}$

Ne segue che

$$(A_j, B_j) = [A_j, B_j](L)[L]^{-1}$$

$$(A_j, B_j) = [L]^{-1}(L)[A_j, B_j]$$

Ma $[L]^{-1}(L) = (L)[L]^{-1}$ e quindi $(L)[L]^{-1}$ commuta con tutti i commutatori e quindi con l'algebra generata da tutti i commutatori.

Un insieme $\mathcal{M}$ di operatori è detto irriducibile se non esiste alcun sottospazio invariante proprio di $\mathcal{H}$ sotto l'azione di $\mathcal{M}$.

Sia $\mathcal{M}$ un'algebra irriducibile di operatori limitati tale che se $A \in \mathcal{M}$ pure $A^+ \in \mathcal{M}$

I seguenti tre criteri di irriducibilità sono equivalenti [2]

1. $\mathcal{M}$ è irriducibile.

2. Il commutante di $\mathcal{M}$ (cioè $\mathcal{M}'$) è cI.

3. Ogni vettore $\psi \neq 0$ è ciclico i.e. $\overline{\text{linear span}(\mathcal{M}\psi)} = \mathcal{H}$

Quindi se l'algebra $\mathcal{M}$ generata dai commutatori è irriducibile si ha $\mathcal{M}' = \{\lambda I\}$, e quindi

$$(A_j, B_j) = c[A_j, B_j]$$

e c è una costante universale. Se vogliamo che siano rispettate le stesse relazioni tra le dimensioni che esistono nelle P.P. classiche, c deve avere le dimensioni di una azione. Inoltre imponendo che (A, B) con A e B hermitiani sia hermitiano si ha che c deve essere immaginario puro.

Poniamo

$$(A_j, B_j) = \frac{1}{i\hbar}[A_j, B_j]$$

dove $\hbar$ è una costante con le dimensioni di una azione, da determinare sprimentalmente.

Nota: Il risultato 3 ci dice che nel caso di irriducibilità si possono sostituire i vettori con operatori; sovrapporre due stati $A\psi$ e $B\psi$ è equivalente a to considerare $\alpha A + \beta B$ e quindi lo spazio vettoriale è in realtà lo spazio lineare degli operatori.

Esempio 1.

Se l'algebra degli operatori considerati contiene $e^{ipa/\hbar}$ e e^{iqb} con le regole di commutazione postulate da Weyl

$$e^{ipa/\hbar} e^{iqb} e^{-ipa/\hbar} = e^{iqb} e^{iab}$$

si ha

$$e^{ipa/\hbar} e^{iqb} - e^{iqb} e^{ipa/\hbar} = C = e^{iqb} e^{ipa/\hbar} (e^{iab} - 1)$$

e C è invertibile purchè $ab \neq 2\pi n$ e quindi esiste un $[L]$ che ammette inverso. Per quanto riguarda l'irriducibilità è possibile dimostrare che sullo spazio L^2 l'algebra dei commutatori è irriducibile.

Esempio 2.

Si consideri lo spazio di Hilbert bidimensionale (che descrive lo spin 1/2) con gli operatori

$$s_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad s_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[s_j, s_k] = i\varepsilon_{jkm} s_m$$

e vale $s_k^2 = I/4$. Gli operatori s_1, s_2, s_3 più l'identità sono un insieme completo di matrici e quindi si ha che l'algebra generata dai commutatori è irriducible. Segue che l'unica operazione che rispetta le proprietà delle P.P. è il commutatore.

Bibliografia

[1] P.A.M. Dirac, "The principles of quantum mechanics", Chapt.4, Clarendon, Oxford.

[2] W. Thirring, "Quantum mechanics of atoms and molecules", Chapt.2 par. 2.3, Springer Verlag.

[3] J. Grabowski e G. Marmo, "Binary operations in classical and quantum mechanics" Banach Center Publications, vol. 59, Polish Academy of Sciences.

061108