Il gruppo euclideo

1. Traslazioni

Come introduzione vogliamo trovare il generatore delle traslazioni. Consideriamo un sistema descritto dal vettore ψ e sia

$$\psi_\varepsilon = (1 - i\varepsilon\hat{t}_k)\psi$$

il vettore di stato che descrive lo sistema traslato di ε in verso positivo lungo l'asse k. Si deve avere

$$(\psi_\varepsilon, \hat{q}_m\psi_\varepsilon) = (\psi, \hat{q}_m\psi) + \varepsilon\delta_{km}$$

e quindi

$$[\hat{q}_m, \hat{t}_k] = i\delta_{mk}. \tag{1}$$

Similmente

$$(\psi_\varepsilon, p_m\psi_\varepsilon) = (\psi, p_m\psi)$$

cioè

$$[\hat{p}_m, \hat{t}_k] = 0. \tag{2}$$

La prima ci dice che $\hat{t}_k = \hat{p}_k/\hbar + f_k(\hat{q})$, dove $f_k(\hat{q})$ sono tre funzioni delle coordinate, mentre la seconda ci dice che f_k sono delle costanti. Abbiamo quindi dimostrato

$$\hat{t}_k = \hat{p}_k/\hbar + c_k$$

dove le c_k se vogliamo che $(1 - i\varepsilon t_k)$ conservi la norma dei vettori, devono essere numeri reali. La traslazione finita è data da

$$e^{-i\hat{p}_k b/\hbar} e^{-ic_k b}.$$

Essendo il gruppo delle traslazioni abeliano le traslazioni si compongono facilmente.

Ci si può chiedere se non si possa addirittura definire l'operatore impulso come il generatore delle traslazioni e similmente l'operatore momento angolare come il generatore delle rotazioni. Il vantaggio di svincolare il momento angolare dalla espressione del momento angolare orbitale, consiste nel poter introdurre forme più generali di momento angolare, cioè lo spin.

Per fare questo occorre sviluppare delle considerazioni generali sulle trasformazioni di simmetria.

2. Trasformazioni di simmetria

Consideriamo per concretezza una trasformazione ortogonale $\mathbf{q}' = \gamma(\mathbf{q})$ con γ matrice ortogonale propria. Questa trasformazione può essere intesa in due modi diversi.

1. Atteggiamento attivo: Ruotando il sistema i punti fisici sono passati dalla posizione di coordinate $\mathbf{q}$ a quella di coordinate $\mathbf{q}'$.
2. Atteggiamento passivo: Ho cambiato il mio sistema di riferimento e quindi descrivo lo stesso punto con due terne di coordinate diverse.

Le considerazioni che seguono valgono per entrambi gli atteggiamenti eccetto quando esplicitamente detto. Se ψ descrive uno stato, sia $\psi' = T\psi$ il vettore che descrive lo stato del sistema ruotato oppure dello stesso sistema descritto nel sistema di riferimento ruotato.

In presenza di invarianza sotto rotazioni, cioè in assenza di campi esterni, la invarianza delle probabilità di transizione ci dice che

$$\frac{|(\phi,\psi)|^2}{(\phi,\phi)(\psi,\psi)} = \frac{|(T\phi,T\psi)|^2}{(T\phi,T\phi)(T\psi,T\psi)} \tag{3}$$

Si noti che la (3) è una relazione sperimentalmente verificabile.

Un insieme di trasformazioni T che ammettano inversa e per cui la (3) valga, costituiscono un gruppo e questo viene chiamato un gruppo di simmetria.

Analizziamo in maggior dettaglio il significato di una operazione di simmetria. Il nostro mondo macroscopico presenta delle proprietà di invarianza. Consideriamo uno strumento A che prepara uno stato ψ ed uno strumento B che misura lo stato ψ. La misura più semplice è quella rappresentata dalla proiezione su di un stato ϕ. Il modulo quadrato del prodotto scalare tra ψ e ϕ dà la probabilità di misurare il valore 1 per la osservabile rappresentata da $\phi \circ \phi$. Se spostiamo o/e ruotiamo rigidamente i due apparati A e B sia lo stato preparato che l'osservabile che misura B cambiano. E' un fatto sperimentale però che (in assenza di campi esterni che rompono l'invarianza sotto il gruppo euclideo) le probabilità di transizione restano invariate. Questa è l'invarianza sotto il gruppo euclideo. Lo stesso si può dire per le trasformazioni di Galileo.

Dal punto di vista passivo in assenza di invarianza sotto il gruppo euclideo il problema è più delicato: Bisogna immaginare ruotato l'osservatore il quale con i suoi strumenti ruotati esamina e determina lo stato prodotto dall'apparato A e il proiettore espresso da B. (A e B ora non sono ruotati rispetto al laboratorio). L'osservatore ruotato darà una descrizione diversa degli stati ψ e ϕ (sui pensi ad es. alla funzione d'onda nello spazio delle coordinate). Nondimeno egli deve ottenere dai sui calcoli le stesse probabilità di transizione misurate nel laboratorio. In questo caso più che alla simmetria sotto trasformazioni attive ci si riferisce alla invarianza della predizione di un fenomeno fatte da due osservatori diversi.
La trasformazione T può essere sempre presa in modo che conservi la norma, dato che fino a questo punto T è una trasformazione generale non necessariamente lineare; cioè porremo

$$(T\psi, T\psi) = (\psi, \psi). \tag{4}$$

Chiaramente un cambiamento del tipo

$$T \to T' \quad \text{definito da} \quad T'\psi = \exp(i\alpha(\psi))T\psi \tag{5}$$

lascia invariate le relazioni (3) e (4) e quindi possiamo cercare di sfruttare questa arbitrarietà per ridurre l'operatore T a forma più convenzionale. Wigner [1, 2] dimostra che è sempre possibile scegliere le fasi in (5) in modo che l'operatore T diventi o lineare o antilineare (non entrambi i casi possono essere realizzati a partire da una data trasformazione T). Nel caso lineare la (4) ci dice che L (nome che diamo a questo operatore lineare) è isometrico i.e. $L^+L = 1$ e poichè T ha inverso si ha pure $LL^+ = 1$ cioè L è unitario.
Esaminiamo ora il caso antilineare. La definizione di operatore antilineare è

$$A(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha^* A\psi + \beta^* A\phi. \tag{6}$$

Se $(A\psi, A\psi) = (\psi, \psi)$ si ha a partire dalla definizione di operatore antilineare

$$\begin{gathered}(A(\alpha\psi + \beta\phi), A(\alpha\psi + \beta\phi)) = |\alpha|^2(\psi, \psi) + \beta^*\alpha(\phi, \psi) + \alpha^*\beta(\psi, \phi) + |\beta|^2(\phi, \phi) = \\ |\alpha|^2(A\psi, A\psi) + \beta^*\alpha(A\psi, A\phi) + \alpha^*\beta(A\phi, A\phi) + |\beta|^2(A\phi, A\phi)\end{gathered} \tag{7}$$

da cui, data la arbitrarietà di α e β si ha $(A\psi, A\phi) = (\phi, \psi)$ che definisce un operatore antiisometrico. Il numero complesso $(\psi, A\phi)^* = (A\phi, \psi)$ dipende linearmente da ϕ e quindi è scrivibile per il teorema di Riesz come (ζ, ϕ) cioè

$$(\psi, A\phi) = (\phi, \zeta)$$

con ζ che dipende antilinearmente da ψ e quindi possiamo introdurre l'operatore antilineare A^+ da chiamarsi l'aggiunto di A definito da

$$A^+\psi = \zeta$$

La invarianza della norma di ψ ci dice in questo caso che l'operatore A è antiisometrico cioè $A^+A = 1$ mentre di nuovo l'ipotesi di invertibilità ci dice che vale pure $AA^+ = 1$ nel qual caso A viene chiamato antiunitario. Queste considerazioni valgono per tutte le operazioni di simmetria. Vogliamo ora dimostrare [1] che per tutte le operazioni di simmetria che commutano proiettivamente con l'evoluzione temporale e mandano autostati della energia in autostati della energia con valore inalterato della energia, la sola possibilità consistente con il principio di sovrapposizione è quella unitaria. Consideriamo infatti la sovrapposizione di due autostati della energia ψ_1 e ψ_2 relativi a valori diversi della energia E_1 e E_2 e ammettiamo per assurdo che la trasformazione di simmetria sia antiunitaria. Lo stato $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$ al tempo 0 si evolve al tempo t nello stato

$$\alpha_1 \exp(-iE_1t/\hbar)\psi_1 + \alpha_2 \exp(-iE_2/\hbar)\psi_2. \tag{8}$$

Invece lo stato trasformato all'istante 0 cioè $\alpha_1^* A\psi_1 + \alpha_2^* A\psi_2$ si evolve al tempo t nello stato

$$\alpha_1^* \exp(-iE_1/\hbar)A\psi_1 + \alpha_2^* \exp(-iE_2/\hbar)A\psi_2. \tag{9}$$

Se ora trasformiamo secondo l'operatore A lo stato (8) dobbiamo trovare lo stato (9) e quindi il vettore

$$\alpha_1^* \exp(iE_1/\hbar)A\psi_1 + \alpha_2^* \exp(iE_2/\hbar)A\psi_2$$

può differire al più per un fattore di fase da

$$\alpha_1^* \exp(-iE_1/\hbar)A\psi_1 + \alpha_2^* \exp(-iE_2/\hbar)A\psi_2.$$

Ma essendo i due stati $A\psi_1$ e $A\psi_2$ ortogonali ed $E_1 \neq E_2$ ciò non può essere valido per ogni t. Quindi nelle ipotesi sopra fatte una trasformazione antiunitaria dà luogo ad una contraddizione. In particlolare le due affermazioni $[A, H] = 0$ e $\exp(-iHt/\hbar)A = A\exp(-iHt/\hbar)$ con A antiunitario sono in contraddizione. Invece non risultano in contraddizione le due relazioni $[A, H] = 0$ e $\exp(iHt/\hbar)A = A\exp(-iHt/\hbar)$, con A antilineare, anzi dalla prima si ricava la seconda (per es. sviluppando in serie l'esponenziale e ricordando che A anticommuta con la i). Se esiste un A antilineare con la proprietà di commutare con la H allora si dice che A è una operazione di inversione del tempo e che il sistema descritto da H è invariante sotto inversione temporale.

Consideriamo un gruppo di trasformazioni di simmetria rappresentabile mediante operatori unitari e siano γ_1 e γ_2 rappresentate dagli operatori unitari $U(\gamma_1)$ e $U(\gamma_2)$. Alla trasformazione prodotto $\gamma_2\gamma_1$ corrisponde l'operatore unitario $U(\gamma_2\gamma_1)$. Ma la successione delle due trasformazioni γ_1, γ_2 è fisicamente equivalente alla trasformazione $\gamma_2\gamma_1$ e quindi si deve avere

$$U(\gamma_2\gamma_1)\psi = \alpha(\gamma_2, \gamma_1, \psi)U(\gamma_2)U(\gamma_1)\psi$$

dove appunto α è un fattore di fase che può in linea di principio dipendere sia da γ_1, γ_2 che dal vettore di stato ψ.

Un semplice ragionamento però mostra che α non può dipendere dal vettore ψ. Infatti consideriamo due operatori unitari U e V tali che per qualunque vettore ψ valga $U\psi = \alpha V\psi$ con α in generale dipendente da ψ. Definito $K = V^+U$ e dati due vettori linearmente indipendenti ψ_1 e ψ_2 abbiamo $K\psi_1 = \alpha_1\psi_1$ e $K\psi_2 = \alpha_2\psi_2$ e pure

$$K(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1K\psi_1 + a_2K\psi_2 = a_1\alpha_1\psi_1 + a_2\alpha_2\psi_2 =$$

$$= \alpha_3(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1\alpha_3\psi_1 + a_2\alpha_3\psi_2$$

ed essendo ψ_1 e ψ_2 indipendenti, si deve avere $\alpha_3 = \alpha_1$ e $\alpha_3 = \alpha_2$, cioè $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{const.}$ Quindi

$$U(\gamma_2\gamma_1) = \alpha(\gamma_2, \gamma_1)U(\gamma_2)U(\gamma_1). \tag{10}$$

Una corrispondenza $\gamma \to U(\gamma)$ che soddisfa la (10) viene chiamata una rappresentazione a meno di una fase (o proiettiva) del gruppo di simmetria.

Vale il seguente teorema [3]: Dato un gruppo compatto e di esso una rappresentazione proiettiva, cioè che soddisfa la (14), continua in un intorno della identità si può effettuare una trasformazione di fase sulle U cioè $U \to \omega(U)U$ con ω fattore di fase, in modo che in un intorno della identità la rappresentazione rimanga continua ed in tale intorno diventi una genuina rappresentazione, cioè valga la (10) con $\alpha \equiv 1$. Lo stesso però non lo si può dire per la rappresentazione in grande. Infatti si può assicurare che la (10) con $\alpha \equiv 1$ valga in grande solo se il gruppo è semplicemente connesso. $SO(3)$ non è un gruppo semplicemente connesso e in generale non si possono ridefinire le fasi in modo da avere un rappresentazione continua in grande con $\alpha \equiv 1$ in (10).

3. Rotazioni

Specifichiamo ora le nostre considerazioni per il gruppo delle rotazioni $SO(3)$. La caratteristica principale che distingue questo gruppo dalle traslazioni è la sua non commutatività. Data una trasformazione reale antisimmetrica in tre dimensioni $\alpha = -\alpha^T$, consideriamo e^α. Si ha $(e^\alpha)^T = e^{-\alpha} = (e^\alpha)^{-1}$, cioè e^α è una trasformazione ortogonale e $e^{\phi\alpha}$ è un gruppo ad un parametro di trasformazioni ortogonali connesso con l'identità. Ricordiamo che in tre dimensioni tutte le rotazioni proprie, cioè gli elementi di $SO(3)$ sono rotazioni attorno ad un asse. Date due rotazioni infinitesime caratterizzate dalle trasformazioni antisimmetriche α e β vogliamo calcolare il "commutatore" delle trasformazioni generate da α e β cioè $\exp(-\varepsilon\beta)\exp(-\varepsilon\alpha)\exp(\varepsilon\beta)\exp(\varepsilon\alpha)$ tenendo i termini fino al secondo ordine. Usando due volte la formula di Campbell Baker Hausdorff $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B+[A,B]/2)+O_3)$ si ottiene

$$e^{-\varepsilon\beta}e^{-\varepsilon\alpha}e^{\varepsilon\beta}e^{\varepsilon\alpha} = e^{-\varepsilon\beta-\varepsilon\alpha+\varepsilon^2[\beta,\alpha]/2+O(\varepsilon^3)}e^{\varepsilon\beta+\varepsilon\alpha+\varepsilon^2[\beta,\alpha]/2+O(\varepsilon^3)} = e^{\varepsilon^2[\beta,\alpha]+O(\varepsilon^3)} \tag{11}$$

(si noti che pure $[\beta,\alpha]$ è una trasformazione antisimmetrica). Secondo quanto affermato dal teorema di Wigner, data una rotazione, è sempre possibile rappresentarla nello spazio di Hilbert mediante una trasformazione unitaria e secondo l'enunciato teorema di Bargmann le $U(\gamma)$ possono essere scelte in modo che in un intorno della identità formino un vera rappresentazione, cioè valga la

$$U(\gamma_2)U(\gamma_1) = U(\gamma_2\gamma_1). \tag{12}$$

Per il teorema di Stone il gruppo ad un parametro delle trasformazioni unitarie $U(e^{\phi\alpha})$ si scrive nella forma

$$U(e^{\phi\alpha}) = e^{-i\phi r(\alpha)/\hbar}$$

con $r(\alpha)$ operatore autoaggiunto e lo stesso dicasi per β. Usando di nuovo la formula di Campbell-Baker-Hausdorff

$$U(e^{-\varepsilon\beta})U(e^{-\varepsilon\alpha})U(e^{\varepsilon\beta})U(e^{\varepsilon\alpha}) = e^{\varepsilon^2[-ir(\beta)/\hbar, -ir(\alpha)/\hbar]+O(\varepsilon^3)}$$

che secondo la (11) e la (12) deve essere uguale a

$$e^{-i\varepsilon^2 r[\beta,\alpha]/\hbar+O(\varepsilon^3)}$$

cioè

$$[r(\alpha), r(\beta)] = i\hbar r([\alpha, \beta]). \tag{13}$$

Specifichiamo ora le trasformazioni α e β ... come le rotazioni infinitesime attorno agli assi coordinati.

$$\alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \alpha_3 = A_3$$

con A_1, A_2, A_3 dati da

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per es. α_3 dà luogo alla trasformazione infinitesima

$$\begin{cases} q_1' = q_1 - \epsilon_3 q_2 \\ q_2' = q_2 + \epsilon_3 q_1 \\ q_3' = q_3 \end{cases}$$

Le tre matrici A soddisfano alle regole di commutazione

$$A_i A_j - A_j A_i = \epsilon_{ijk} A_k \quad \text{e.g.} \quad A_1 A_2 - A_2 A_1 = A_3. \tag{14}$$

Posto ora

$$r(A_j) = M_j$$

e usando le (13) e (14) otteniamo

$$[M_j, M_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}M_l \tag{15}$$

che sono identiche alle regole di commutazione del momento angolare orbitale ricavate precedentemente. Però ora siamo arrivati alle (15) senza dover specificare la natura del vettore che stiamo trasformando.
Ammettiamo per incominciare che lo stato sia rappresentato dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{q})$. Il modo più semplice e naturale di trasformare la funzione d'onda sotto rotazioni si ottiene imponendo la invarianza in valore della funzione d'onda, cioè

$$\psi'(\mathbf{q}') = \psi'(\gamma_1(\mathbf{q})) = \psi(\mathbf{q}) \quad \text{cioe} \quad \psi'(\mathbf{q}) = \psi(\gamma_1^{-1}(\mathbf{q}))$$

Per due trasformazioni successive γ_1 e poi γ_2 si ha

$$\psi''(\mathbf{q}) = \psi'(\gamma_2^{-1}(\mathbf{q})) = \psi(\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}(\mathbf{q})) = \psi((\gamma_2\gamma_1)^{-1}(\mathbf{q})).$$

E' immediato che la trasformazione (24) è unitaria in quanto

$$\int \psi^*(\gamma^{-1}(\mathbf{q}))\phi(\gamma^{-1}(\mathbf{q}))\, d\mathbf{q} = \int \psi^*(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}$$

a causa del fatto che lo jacobiano di una trasformazione ortogonale è uguale ad 1. Abbiamo quindi $\psi'(\mathbf{q}) = \psi(\gamma_1^{-1}(\mathbf{q})) \equiv U(\gamma_1)\psi(\mathbf{q})$ e $U(\gamma_2\gamma_1) = U(\gamma_2)U(\gamma_1)$ senza alcuna fase aggiuntiva. Quindi la trasformazione in valore delle funzioni d'onda realizza completamente il programma di ottenere per $SO(3)$ una vera rappresentazione su tutto il gruppo $SO(3)$.
Vediamo quanto vale esplicitamente il generatore delle rotazioni attorno all'asse 3.

$$(1 - i\varepsilon r(A_3)/\hbar)\psi(\mathbf{q}) = (1 - i\varepsilon M_3/\hbar)\psi(\mathbf{q}) =$$

$$= \psi(\mathbf{q} - \varepsilon A_3(\mathbf{q})) = \psi(q_1 + \varepsilon q_2, q_2 - \varepsilon q_1, q_3) = \psi(\mathbf{q}) + \varepsilon(q_2\frac{\partial}{\partial q_1} - q_1\frac{\partial}{\partial q_2})\psi(\mathbf{q})$$

$$= \psi(\mathbf{q}) - \frac{i}{\hbar}\varepsilon(-i\hbar q_1\frac{\partial}{\partial q_2} + i\hbar q_2\frac{\partial}{\partial q_1})$$

i.e.

$$M_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

che è proprio l'espressione del momento angolare orbitale.

4. Il gruppo euclideo (facoltativo)

Vogliamo ora completare la discussione trattando nella sua interezza il gruppo euclideo [4]. Le traslazioni

$$q'_k = q_k + c_k$$

combinate con le rotazioni

$$q'_k = \gamma_{kl} q_l$$

costituiscono ovviamente un gruppo che viene chiamato il gruppo euclideo. Se indichiamo con T_k i generatori delle traslazioni e J_k quelli delle rotazioni ($J_k \equiv A_k$) si ottengono facilmente le seguenti regole di commutazione

$$[J_k, J_l] = \varepsilon_{klm} J_m$$

$$[J_k, T_l] = \varepsilon_{klm} T_m$$

$$[T_k, T_l] = 0$$

L'ultima ci dice semplicemente che le traslazioni commutano tra di loro.

In meccanica quantistica il gruppo di simmetria "gruppo euclideo" può essere rappresentato da trasformazioni unitarie (teorema di Wigner) i cui generatori sono operatori autoaggiunti (teorema di Stone). Il gruppo però non è compatto quindi non ci possiamo avvalere del teorema di Bargmann. Se indichiamo con $\hat{J}_k$ e $\hat{T}_k$ gli operatori che generano le rotazioni e le traslazioni sui vettori dello spazio di Hilbert, a causa del fatto che in meccanica quantistica ciò che sono significativi sono i raggi e non i vettori possiamo solo scrivere

$$[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\hbar(\varepsilon_{klm} J_l + a_{kl})$$

$$[\hat{J}_k, \hat{T}_l] = i\hbar(\varepsilon_{klm} T_m + b_{kl})$$

$$[\hat{T}_k, \hat{T}_l] = i\hbar c_{kl}$$

dove a causa della unitarietà delle trasformazioni $a_{kl},\ b_{kl},\ c_{kl}$ devono essere numeri reali. Si noti che essendo i commutatori antisimmetrici abbiamo che $a_{kl} = -a_{ml}$, $c_{kl} = -c_{lk}$ mentre lo stesso non lo si può dire per b_{kl}. Data la antisimmetria possiamo scrivere

$$a_{kl} = \varepsilon_{klm} a_m; ; \qquad c_{kl} = \varepsilon_{klm} c_m;$$

L'identità di Jacobi

$$[\hat{J}_k, [\hat{P}_l, \hat{P}_m]] + \text{ cicliche} = 0$$

fornisce

$$(\varepsilon_{mkr}\varepsilon_{lrs} + \varepsilon_{klr}\varepsilon_{mrs}) c_s = 0$$

cioè $c_s = 0$. Decomponendo b_{kl} in parte antisimmetrica e parte simmetrica

$$b_{kl} = \varepsilon_{klm} b_m + b_{(kl)}$$

l'identità di Jacobi

$$[\hat{J}_k, [\hat{J}_l, \hat{P}_m]] + \text{ cicliche} = 0$$

fornisce

$$\varepsilon_{lmr} b_{(kr)} + \varepsilon_{mkr} b_{(lr)} - \varepsilon_{klr} b_{(kr)} = 0 \tag{16}$$

Antisimmetrizzando la (16) in lm si ottiene

$$\varepsilon_{lmr} b_{(kr)} = 0; \qquad \text{cioe}' \quad b_{(lr)} = 0$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} (\hat{J}_m + a_m)$$

$$[\hat{J}_k, \hat{T}_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} (\hat{T}_m + b_m)$$

$$[\hat{T}_k, \hat{T}_l] = 0$$

Definendo $\tilde{J}_k = \hat{J}_k + a_k$, $\tilde{T}_k = \hat{T}_k + b_k$ si ha

$$[\tilde{J}_k, \tilde{J}_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} \tilde{J}_m \tag{17}$$

$$[\tilde{J}_k, \tilde{T}_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} \tilde{T}_m \tag{18}$$

$$[\tilde{T}_k, \tilde{T}_l] = 0 \tag{19}$$

Le (17,18,19) vengono chiamate una *rappresentazione canonica* delle rotazioni e traslazioni. La (17) dà luogo alla quantizzazione del momento angolare come già discusso (e sperimentalemente osservato) mentre la (19) unita alle

$$[\hat{q}_k, \hat{q}_l] = 0; \quad [\hat{q}_k, \hat{T}_l] = i\delta_{kl}$$

può essere adottata come definizione generale dell'impulso: $\hat{p}_k = \hbar\hat{T}_k$
Riassumendo: Si definisce impulso e momento angolare di un sistema quantistico come la *rappresentazione canonica* dei generatori del gruppo euclideo.

References

[1] E.P. Wigner: Group theory, Academic Press (1959) pag. 233

[2] S. Weinberg: The quantum theory of fields I, Cambridge University Press, pag. 91

[3] V. Bargmann, Ann.of Math. **59** 1 (1952))

[4] G. Sartori: Lezioni di meccanica quantistica, Edizioni Libreria Cortina, Padova.

071130