Formulazione funzionale della meccanica quantistica

La meccanica quantistica nella sua forma definitiva è stata scoperta in due schemi matematici diversi e subito dimostrati equivalenti. Possiamo chiamarla la formulazione operatoriale in quanto le variabili dinamiche sono rappresentate da operatori lineari che agiscono sullo spazio degli stati.

La regola di quantizzazione è data dal principio di corrispondenza cioè: rimpiazzare le parentesi di Poisson della meccanica hamiltoniana classica con i commutatori divisi per $i\hbar$.

La formulazione hamiltoniana della meccanica classica non è relativisticamente invariante a vista; infatti la H (energia) non è un invariante relativistico (componente zero di un quadrivettore).

Invece l'approccio lagrangiano classico è covariante a vista in quanto attraverso la lagrangiana si riesce a definire l'azione che è una quantitità invariante (scalare).

$$S = \int_{q_0 t_0}^{q\ t} L(q, \dot{q}) dt$$

ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. L'annullamento della variazione di S, $\delta S = 0$, fornisce le equazioni del moto le quali essendo S un invariante risultano essere covarianti.

Per es. per una carica in campo e.m. esterno si ha

$$S = \int_{q_0 t_0}^{q\ t} (-mc\frac{ds}{dt} + \frac{e}{c} A_\mu \frac{dx^\mu}{dt}) dt = \int_{q_0 t_0}^{q\ t} (-mc\frac{ds}{d\lambda} + \frac{e}{c} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}) d\lambda$$

con $ds = \sqrt{c^2 - v^2} dt$ e $A_\mu dx^\mu = A^l dx^l - V c dt$; $A_\mu = (\mathbf{A}, -V)$.

La ricerca di una formulazione lagrangiana della meccanica quantistica (e quindi la possibiltà di dare una formulazione relativisticamente invariante) è stata la motivazione principale della formulazione di Feynman. E' stata ispirata da alcune osservazioni di Dirac (cfr. P.A.M. Dirac "The principles of quantum mechanics" par.32 The action principle.)

Le principali caratteristiche sono

1. E' più "intuitiva" per quanto possa essere intuitiva la meccanica quantistica.

2. Richiede però una matematica di tipo più elevato (concetto di integrazione su di un spazio di funzioni)

3. Pochi problemi si prestano ad essere risolti direttamente in questo approccio.

4. Ha d'altronde un grande valore euristico e formale:

4.1. Possibilità di dare una formulazione relativisticamente invariante (Lagrangiana e non Hamiltoniana)

4.2 Come guida nella organizzazione della serie perturbativa.

4.3 Per le sue analogie con la meccanica statistica.

4.4 Come strumento per sviluppare nuovi tipi di approssimazione.

Non seguirò la linea storicamente seguita da Feynman, perchè mi prenderebbe troppo tempo ed invece percorrerò il cammino inverso, cioè come dalla formulazione usuale operatoriale hamiltoniana si possa arrivare alla formulazione di Feynman.

Mi rifaccio al caso unidimensionale (non c'è difficoltà ad andare in più dimensioni) e l'oggetto che si prende in considerazione è il propagatore che abbiamo già studiato (in notazione di Dirac)

$$G(q,t;q_0,t_0) = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|q_0\rangle$$

dove H è supposto indipendente dal tempo. E' noto che questa ci dà l'ampiezza di probabilità che una particella che si trovi in q_0 all'istante t_0 si trovi in q all'istante t. La probabilità è data da

$$|G(q,t;q_0,t_0)|^2.$$

Questa funzione di Green permette di calcolare più in generale ampiezze di transizione e quindi probabilità di transizione tra stati

$$\langle\phi|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|\psi\rangle = \int\int \langle\phi|q\rangle dq\langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|q_0\rangle dq_0\langle q_0|\psi\rangle =$$

$$= \int \phi^*(q) dq G(q,t;q_0,t_0) dq_0 \psi(q_0)$$

e quindi risolve il problema dinamico della meccanica quantistica.

Si noti inoltre che inserendo un insieme completo di autostati della energia di ha

$$G(q,t;q_0,t_0) = \int dE \langle q|E\rangle\langle E|q_0\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}$$

e dalla analisi di Fourier di $G(q,t;q_0,t_0)$ si riesce a risalire ai livelli energetici e alle funzioni d'onda relativi ai livelli energetici.

Si noti come le stesse informazioni si possono ottenere da

$$\tilde{G}(q,\tau;q_0,0) = \langle q|e^{-\frac{\tau}{\hbar}H}|q_0\rangle = \int dE e^{-\frac{\tau}{\hbar}E}\langle q|E\rangle\langle E|q_0\rangle$$

quindi in termini di una trasformata di Laplace.

Preso un tempo t_1 con $t > t_1 > t_0$ possiamo pure riscrivere

$$G(q,t;q_0,t_0) = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_1)}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_0)}|q_0\rangle = \int G(q,t;q_1,t_1) dq_1 G(q_1,t_1;q_0,t_0) \tag{1}$$

Questa espressione ricorda la formula per processi probabilistici cioè

$$P(q,t;q_0,t_0) = \int P(q,t;q_1,t_1) dq_1 P(q_1,t_1;q_0,t_0). \tag{2}$$

D'altronde in meccanica quantistica

$$P(q,t;q_0,t_0) = |G(q,t;q_0,t_0)|^2$$

e quindi se la (1) è vera la (2) non può essere vera. In realtà la (2) è vera se si rimpiazza nel membro a sinistra $P(q,t;q_0,t_0)$ con $P_{\hat{q}t_1}(q,t;q_0,t_0)$, in altre parole se all'istante t_1 si effettua una misura della coordinata, o meglio se è presente uno strumento (acceso) in grado di misurare la coordinata.

Possiamo ora inserire molti tempi (e.g. egualmente spaziati) tra t_0 e t e abbiamo

$$G(q,t;q_0,t_0) = \int \ldots \int G(q,t;q_{n-1},t_{n-1}) dq_{n-1} G(q_{n-1},t_{n-1};q_{n-2},t_{n-2}) dq_{n-2} \ldots$$

$$\dots G(q_2, t_2; q_1, t_1) dq_1 G(q_1, t_1; q_0, t_0)$$

con $t_k = t_0 + k\Delta$ e $\Delta = (t - t_0)/n \equiv \frac{T}{n}$. Cosa si è guadagnato con questa decomposizione? Se l'hamiltoniana è della forma $H = V + K$ con $V = V(\hat{q})$ e $K = \hat{p}^2/2m$ si ha

$$G(q_k, t_k; q_{k-1}, t_{k-1}) = \langle q_k | e^{-\frac{i}{\hbar}(V+K)\Delta} | q_{k-1} \rangle =$$

$$= \langle q_k | e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta} e^{-\frac{i}{\hbar}K\Delta} | q_{k-1} \rangle + o(\Delta)$$

dove qualitativamente $o(\Delta)/\Delta \to 0$ per $\Delta \to 0$.

In realtà esiste un teorema (vedi appendice) noto come formula di Trotter che dice

$$e^{-\frac{i}{\hbar}HT} = s - \lim_{n\to\infty} (e^{-\frac{i}{\hbar}V\frac{T}{n}} e^{-\frac{i}{\hbar}K\frac{T}{n}})^n$$

dove $s-\lim$ sta per limite forte. Questi risultati possono essere capiti qualitativamente dalla formula di Baker-Campbell-Haussdorf

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+O_3}.$$

Essendo l'errore che si fa separando i due esponenziali del secondo ordine, nel limite in cui n tende all'infinito, l'errore che viene indotto nel prodotto tende a zero.

Per es. per operatori limitati avremmo

$$||e^{A+B} - e^A|| \le e^{||A||+||B||} - e^{||A||}$$

Inoltre per l'errore accumulato nella moltiplicazione di n termini abbiamo $|(1+\frac{\varepsilon}{n})^n - 1| \le e^{|\varepsilon|} - 1$ che tende a zero per $\varepsilon \to 0$. La difficoltà maggiore nella dimostrazione della formula di Trotter è il trattare con operatori illimitati, la cui comparsa è di regola nelle hamiltoniane della meccanica quantistica. Abbiamo

$$G(q, t; q_0, t_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \dots \int \langle q| e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta} e^{-\frac{i}{\hbar}K\Delta} |q_{n-1}\rangle dq_{n-1} \langle q_{n-1}| e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta} e^{-\frac{i}{\hbar}K\Delta} |q_{n-2}\rangle dq_{n-2} \dots$$

$$\dots dq_1 \langle q_1| e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta} e^{-\frac{i}{\hbar}K\Delta} |q_0\rangle.$$

Consideriamo il termine generico

$$\langle q''| e^{-\frac{i}{\hbar}V(\hat{q})\Delta} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta} |q'\rangle = \int e^{-\frac{i}{\hbar}V(q'')\Delta} \langle q''| e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta} |p'\rangle dp' \langle p'|q'\rangle =$$

$$= \int e^{-\frac{i}{\hbar}V(q'')\Delta} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p'^2}{2m}\Delta} \langle q''|p'\rangle dp' \langle p'|q'\rangle = (\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}V(q'')} e^{\frac{im(q''-q')^2}{2\hbar\Delta}}$$

da cui

$$G(q,t;q_0,t_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta})^{\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}V(q)\Delta} e^{\frac{im(q-q_{n-1})^2}{2\hbar\Delta}} dq_{n-1} e^{-\frac{i}{\hbar}V(q_{n-1})\Delta} e^{\frac{im(q_{n-1}-q_{n-2})^2}{2\hbar\Delta}} dq_{n-2} \dots$$

$$dq_1 e^{-\frac{i}{\hbar}V(q_1)\Delta} e^{\frac{im(q_1-q_0)^2}{2\hbar\Delta}}$$

Data ora la partizione dell'intervallo temporale $t - t_0$, con i tempi $t_n = t, t_{n-1}, \dots, t_1, t_0$, presi ad arbitrio dei valori $q_{n-1}, \dots q_1$ si consideri la legge del moto data dalla spezzata disegnata in figura. Vogliamo calcolare l'azione (classica) relativa a tale moto. Si ha

$$\int_{q_0 t_0}^{qt} L(q,\dot{q})dt = \sum_k \left[-\int_{t_{k-1}}^{t_k} V(q_{k-1} + \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta}(t - t_{k-1}))dt + \frac{m}{2}(\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta})^2\Delta \right] \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \left[-V(q_k)\Delta + \frac{m}{2}\frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\Delta} \right]$$

dove abbiamo fatto un errore dell'ordine di Δ^2 rimpiazzando

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} V(q(t))dt \quad \text{con} \quad V(q_k)\Delta.$$

Tale errore è irrilevante nel limite di $n \to \infty$. Il limite per $n \to \infty$ che sappiamo esistere ed essere rigorosamente uguale alla funzione di Green, è la definizione dell'integrale funzionale sui cammini che uniscono l'evento (q_0, t_0) con l'evento (q, t) e si scrive

$$G(q,t;q_0,t_0) = \int \mathcal{D}[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]}.$$

Notare che L non è un operatore ma la lagrangiana classica del sistema. Quindi non abbiamo operatori ma integrali funzionali ($\infty-$dimensionali). Tutti i cammini sono possibili e tutti egualmente probabili, tutti cioè contribuiscono con lo stesso peso che è semplicemente una fase. I cammini vicini a quello classico, essendo sul cammino classico la azione stazionaria sono quelli che danno il massimo contributo mentre quelli lontani dal cammino classico tendono a dare contributi che si elidono per interferenza.

In maniera del tutto analoga si può calcolare

$$\tilde{G}(q,\tau;q_0,0) = \langle q|e^{-\frac{\tau}{\hbar}H}|q_0\rangle = \lim_{n\to\infty}(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta})^{\frac{n}{2}}\int e^{-\frac{V(q)}{\hbar}\Delta}e^{-\frac{m(q-q_{n-1})^2}{2\hbar\Delta}}dq_{n-1}\ldots \tag{3}$$

Si vede che

$$e^{-\frac{V(q_k)}{\hbar}\Delta}e^{-\frac{m(qk-q_{k-1})^2}{2\hbar\Delta}} \approx e^{\frac{1}{\hbar}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\left[-\frac{m}{2}(\dot{q}(\tau))^2-V(q(\tau))\right]d\tau} = e^{\frac{1}{\hbar}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}L_E(q,\dot{q})d\tau}$$

dove la "lagrangiana euclidea" $L_E(q,\dot{q})$ è definita da

$$L_E(q,\frac{\partial q}{\partial\tau}) = L(q,\frac{\partial q}{\partial(-i\tau)})$$

cioè è ottenuta formalmente rimpiazzando t con $-i\tau$ (rotazione di Wick). L'integrale funzionale euclideo risulta essere un potente mezzo di calcolo della funzione di partizione della meccanica statistica quantistica del sistema descritto dalla hamiltoniana H dato che

$$Z(\beta) = \mathrm{tr}(e^{-\beta H}) = \int dq\tilde{G}(q,\hbar\beta;q,0) = \int dq\int\mathcal{D}[q(\tau)]e^{\frac{1}{\hbar}\int_{q,0}^{q,\hbar\beta}L_E(q,\dot{q})d\tau}.$$

Esiste pure un' interpretazione della eq.(3) a livello di meccanica statistica classica. La eq.(3) prima di prendere il limite per $n\to\infty$ può essere vista come la funzione di partizione di una catena unidimensionale di gradi di libertà classici (tipo catena di spin) soggetti al potenziale esterno $V(q)$ e interagenti con i primi vicini con energia di interazione $c(q_k-q_{k-1})^2$ essendo c una costante positiva.

Formula di Trotter

Vogliamo dimostrare qui, senza pretesa di rigore (per la dimostrazione rigorosa vedi appendice) la formula di Trotter, cioè

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(K+V)\Delta}\psi(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta}e^{-\frac{i}{\hbar}K\Delta}\psi(q) + O(\Delta^2)$$

Useremo i seguenti risultati

$$\int e^{\frac{i\alpha q^2}{2}}dq = \sqrt{\frac{2\pi i}{\alpha}}$$

$$\int e^{\frac{i\alpha q^2}{2}}q^{2n+1}dq = 0$$

$$\int e^{\frac{i\alpha q^2}{2}}q^2 dq = \frac{i}{\alpha}\sqrt{\frac{2\pi i}{\alpha}}$$

$$\int e^{\frac{i\alpha q^2}{2}}q^4 dq = -\frac{3}{\alpha^2}\sqrt{\frac{2\pi i}{\alpha}}$$

$$\int e^{\frac{i\alpha q^2}{2}}q^{2n} dq = c(n)\frac{1}{\alpha^n}\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

Si ha

$$e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta}e^{-\frac{i}{\hbar}K\Delta}\psi(q) = (1-\frac{i}{\hbar}V(q)\Delta + O(\Delta^2))\times$$

$$\times(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta})^{1/2}\int e^{\frac{im(q-q')^2}{2\hbar\Delta}}dq'\left[\psi(q) + (q'-q)\psi'(q) + \frac{(q'-q)^2}{2}\psi''(q) + \ldots\right] =$$

$$(1-\frac{i}{\hbar}V(q)\Delta + O(\Delta^2))\left[\psi(q) + \frac{i\hbar\Delta}{2m}\psi''(q) + O(\Delta^2)\right] =$$

$$\psi(q) - \frac{i}{\hbar}V(q)\psi(q)\Delta - \frac{i}{\hbar}(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + O(\Delta^2)) = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta}\psi(q) + O(\Delta^2).$$

In questa maniera si noti abbiamo riprodotto l'equazione di evoluzione di Schroedinger.

E adesso alcune note:

1. Come è stato detto le stesse informazioni sugli stati legati e sulle funzioni d'onda degli stati legati possono esse ottenute studiando il propagatore "euclideo" $e^{-\frac{\tau}{\hbar}H}$, cioè calcolandone la sua trasformata di Laplace. Il fatto è che dal punto di vista calcolativo il propagatore euclideo

è molto più semplice specialmente a livello numerico; questo perchè la $\exp(\frac{1}{\hbar}\int L_E(q,\dot{q})d\tau)$ ha ora la natura di una probabilità e quindi si possono applicare ad essa tutti i risultati della meccanica statistica. Formalmente il passaggio da da L a L_E si ottiene ponendo $x^4 = ix^0 = it$.

2. Configurazioni non di minimo ma stazionarie, possono dare contributi particolarmente rilevanti all'integrale funzionale e quindi possono venire prese come base di sviluppo di nuovi metodi approssimazione.

000502

Appendice: Dimostrazione funzionale della formula di Trotter

Siano A e B autoaggiunti su di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ separabile e $A+B$ definito su $D(A)\cap D(B)$ pure autoaggiunto (e.g. $A=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}=-\frac{\nabla^2}{2m}$ e $B=V(\mathbf{q})$ limitato; oppure $A=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}=-\frac{\nabla^2}{2m}$ e $B=V(\mathbf{q})$ limitato all'infinito e con singolarità coulombiana all'origine).

Teorema:

$$e^{it(A+B)}=s-\lim_{n\to\infty}(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B})^n$$

Se A e B sono inferiormente limitati vale pure

$$e^{-t(A+B)}=s-\lim_{n\to\infty}(e^{-\frac{t}{n}A}e^{-\frac{t}{n}B})^n$$

Dimostrazione: Definiamo $S_t=e^{it(A+B)}$, $V_t=e^{itA}$, $S_t=e^{itB}$, $U_t=V_tW_t$. Pure definiamo l'evoluto temporale di ψ, $\psi_t=S_t\psi$.

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}||(S^n_{\frac{t}{n}}-U^n_{\frac{t}{n}})\psi||=0 \qquad (4)$$

ma dato che tutti gli operatori in questione sono di norma 1, è sufficiente dimostrare la eq.(4) per tutti i ϕ di un denso e noi prenderemo $\phi\in D(A)\cap D(B)$.

Si ha

$$||(S^n_{\frac{t}{n}}-U^n_{\frac{t}{n}})\psi||=||\sum_{j=0}^{n-1}U^{(n-j-1)}_{\frac{t}{n}}(S_{\frac{t}{n}}-U_{\frac{t}{n}})S^j_{\frac{t}{n}}\psi|| \qquad (5)$$

e.g.

$$SSSS-UUUU=(S-U)SSS+U(S-U)SS+UU(S-U)S+UUU(S-U)$$

Dal teorema di Stone abbiamo per un vettore $\phi\in D(A)\cap D(B)$

$$\lim_{s\to 0}\frac{S_s-1}{s}\phi=i(A+B)\phi$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{U_s-1}{s}\phi=i(A+B)\phi$$

Quindi su di un vettore fisso $\phi \in D(A) \cap D(B)$ si ha con $\Delta_n \equiv n(S_{\frac{t}{n}} - U_{\frac{t}{n}})$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n \phi = 0. \tag{6}$$

Possiamo riscrivere la (5) come

$$||(S_t - U^n_{\frac{t}{n}})\phi|| = ||\sum_{j=0}^{n-1} U_{\frac{t}{n}}^{(n-j-1)}(S_{\frac{t}{n}} - U_{\frac{t}{n}})\phi_{s_j}|| \leq$$

$$\leq n \sup_j ||(S_{\frac{t}{n}} - U_{\frac{t}{n}})\phi_{s_j}|| = \sup_j ||\Delta_n \phi_{s_j}|| \leq \sup_{0\leq s\leq t} ||\Delta_n \phi_s|| \tag{7}$$

dove $s_j = j\frac{t}{n}$.

Se il vettore ϕ_s fosse fisso il teorema sarebbe già dimostrato. Il problema è che al variare di ϕ_s, una eccessiva non uniformità del limite eq.(7) potrebbe far fallire il risultato cioè non assicurare che per $n \to \infty$ l'ultimo membro della eq.(7) tenda a zero.

Si nota però che

1. $\phi_s = e^{i(A+B)s}\phi$ è una funzione continua di s (questo è uno dei contenuti del teorema di Stone, cioè la forte continuità di e^{iHs} per H autoaggiunto).

2. Per $\phi \in D(A) \cap D(B)$, ϕ_s è continua in una metrica più stringente di quella dello spazio di Hilbert, cioè nella metrica

$$|||\phi||| = ||\phi|| + ||(A + B)\phi||$$

che dà a $D \equiv D(A) \cap D(B)$ la struttura di uno spazio di Banach. Questo è dovuto al fatto che

$$(A + B)e^{i(A+B)s}\phi = e^{i(A+B)s}(A + B)\phi \to (A + B)\phi.$$

Nota: Ne segue che al variare di s nell'intervallo $[0, t]$, ϕ_s descrive un compatto in D con la metrica $|||\quad|||$.

Nota: D con la metrica di Hilbert $||\quad||$ non è uno spazio di Banach in quanto non è completo. Invece D con la metrica $|||\quad|||$ è completo, essendo $A + B$ un operatore chiuso, in quanto autoaggiunto.

3. Ciascun Δ_n, considerato come operatore lineare da D in $\mathcal{H}$ è limitato e a causa di eq.(6) si ha per ogni $\phi \in D$, fisso

$$\sup_n ||\Delta_n \phi|| < \infty$$

e quindi per il principio di uniforme limitatezza si ha

$$\sup_n ||\Delta_n|| < \infty.$$

cioè

$$||\Delta_n \phi|| < C|||\phi|||.$$

Dato che al variare di s in $[0, t]$, ϕ_s descrive un compatto in D si ha che il limite per $n \to \infty$ dell'ultimo membro di eq.(7) è zero.

In maggior dettaglio: Dato un ε, per ogni s possiamo trovare un $N(s)$ tale che per $n > N(s)$, $||\Delta_n \phi_s|| < \varepsilon$ ed un intorno aperto non nullo $\delta(s)$ di s tale che $||\Delta_n \phi_{s'}|| < 2\varepsilon$ per $s' \in \delta(s)$ e $n > N(s)$. Dato che $[0, t]$ è compatto possiamo estrarre un ricoprimento finito di intorni $\delta(s)$ che ci dice che per $n > N_{max}$ si ha

$$\sup_s ||\Delta_n \phi_s|| < 2\varepsilon$$

Quindi il limite per $n \to \infty$ dell'ultimo membro di eq.(7) è zero.

Riportiamo qui per completezza l'enunciato del teorema della uniforme limitatezza:

Siano X e Y spazi di Banach e $T_\alpha,\ \alpha \in A$, una famiglia di trasformazioni lineari limitate da X a Y.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

$$\sup_\alpha ||T_\alpha|| < \infty$$

$$\sup_\alpha ||T_\alpha x|| < \infty \quad \text{for } x \in X$$

$$\sup_{\alpha} ||y^* T_\alpha x|| < \infty \quad \text{for } x \in X \quad \text{and } y^* \in Y^*$$

Bibliografia

R.P. Feynman : Rev. Mod. Phys.**20** (1948) 367

B. Simon: Functional integration and quantum physics, Academic Press (1979)

W. Pauli: Lectures on theoretical physics, Boringhieri

T.D.Lee: Particle physics and introduction to field theory, Harvood Academic, 1981.

S. Weinberg: The quantum theory of fields, Cambridge University Press, Vol. I 1995.

000502