**Introduzione**

Densità della energia del campo elettromagnetico

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 + c^2B^2)\ (MKS); \quad u = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)\ (Gauss)$$

forma quadratica nei campi $E_j, B_j$.

Decomposizione spettrale della energia media. Dato $f(t)$, $-T/2 < t < T/2$ scriviamo

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n e^{i\omega_n t} \tilde{f}(\omega_n); \quad \tilde{f}(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$\omega_n = 2\pi n/T$. $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$ per realtà di $f$. Valore medio temporale

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \sum_n |\tilde{f}(\omega_n)|^2 \to \frac{1}{2\pi} \int d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2$$

Quindi si può scrivere

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T) d\nu$$

Sperimentalmente l'equilibrio è raggiunto immediatamente.

I teoremi di Kirchhoff assicurano la universalità di $u_\nu(\nu, T)$, cioè indipendenza dal materiale delle pareti, volume, posizione.

Dimostrazione basata sul II principio della termodinamica.

Legge di Stefan-Boltzmann

$$u(T) = K_1 T^4$$

Derivazione basta su 1) II principio della termodinamica i.e. $Q/T = dS$; 2) natura elettromagnetica della radiazione: infatti da

$$P = \epsilon_0 (E \wedge B)\ (MKS); \ P = \frac{1}{4\pi c}(E \wedge B)\ (Gauss)$$

si ha

$$|P| = \frac{u}{c} \quad \text{per onda piana}$$

e per radiazione isotropa discende per la pressione $p = u/3$. Inoltre si ricava per l'entropia

$$S = \frac{4}{3} K_1 V T^3 + \text{cost.} \tag{1}$$

Il potere radiante del corpo nero è dato da

$$\text{potenza} = \sigma T^4 * \text{area}$$

dove $\sigma$, costante di Stefan è collegata a $K_1$ dalla relazione cinematica $\sigma = cK_1/4$. Sperimentalmente $\sigma = 5.67\ 10^{-8} J/m^2 s\ K^4$. Esempio: la temperatura del sole è $T = 6000\ K$. Il raggio apparente del sole è 1/4 di grado = 0.0043. Segue che la potenza della radiazione solare sulla terra è

$$w = \sigma\ (0.0043)^2\ (6000)^4\ K^4 = 1358\ watt/m^2 sec$$

Legge di Wien:

$$u_\nu(\nu, T) = \nu^3 f(\frac{\nu}{T})$$

derivata da

1) Secondo principio della termodinamica;

2) effetto Doppler.

Prima parte: se si comprime radiazione nera in recipiente a pareti riflettenti la radiazione resta nera; cambia solo la sua temperatura secondo la (1).

Seconda parte: rendere compatibile questo con effetto Doppler .

$$\nu' = \nu(1 + 2\frac{v}{c}\cos\theta); \qquad (v/c << 1)$$

Conseguenze: 1) per integrazione discende Stefan-Boltzmann; 2) legge di spostamento

$$\lambda_{max} T = \text{const}; \quad \text{sperimentalmente} \quad \text{const} = 2.9\ \ 10^{-3}\ m\ K$$

Esempio: Temperatura del sole $6000K$

$$6000\ K\ 4800\ 10^{-10}\ m = 2.9\ 10^{-3}\ m\ K$$

4800 Angstrom = $4800\ 10^{-10}\ m$ (siamo nel visibile).

Universalità permette di rimpiazzare pareti con oscillatori armonici.

Potenza media emessa

$$\bar{w}_e = \frac{2e^2}{3c^3}\overline{|\ddot{x}|^2} = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}\bar{E}_\nu \qquad (Gauss); \qquad e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}\ (MKS)$$

Potenza media assorbita

$$\bar{w}_a = \frac{\pi e^2}{3m}u_\nu(\nu,T)$$

Dal bilancio energetico

$$u_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{E}_\nu \tag{2}$$

Tutto il problema è calcolare $\bar{E}_\nu$.

Sostituendo ad $\bar{E}_\nu$ il valore dato dal principio di equipartizione classico $2\frac{1}{2}kT$ si ottiene la legge di Rayleigh-Jeans

$$u_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$$

sperimentalmente ben verificata a basse frequenze; in totale disaccordo ad alte frequenze (catastrofe ultravioletta).

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu V = 2\frac{4\pi\nu^2}{c^3}d\nu V \equiv \mathcal{N}_w$$

è il numero di modi normali del campo e.m. in una cavità. Dato che il campo e.m. è equivalente ad un insieme di oscillatori armonici, possiamo ottenere lo stesso risultato applicando il principio di equipartizione classico a questi oscillatori ottenendo di nuovo, e molto più rapidamente, la legge di Rayleigh-Jeans.

Ipotesi di Planck: l'oscillare armonico ha livelli quantizzati per interi $0, \epsilon_\nu, 2\epsilon_\nu, 3\epsilon_\nu \ldots$. Funzione di partizione

$$Z = \sum_n e^{-\beta\epsilon_\nu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_\nu}}$$

$$\bar{E}_\nu = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \frac{\epsilon_\nu}{e^{\beta\epsilon_\nu} - 1}$$

Sostituendo in (2) e imponendo la legge di Wien si ha la legge di Planck

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 h\nu}{c^3(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

da cui

$$\text{costante di Stefan } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}; \qquad \text{costante di spostamento } \lambda_M T = \frac{h}{k}\frac{c}{4.965}$$

Utilizzando i valori sperimentali di $\sigma$ e della costante di spostamento si ricava $k = 1.38\ 10^{-23}\ J/K$, $h = 6.67\ 10^{-34}\ Js$.

Perchè spaziatura costante dei livelli energetici? Esaminiamo funzione di partizione per grande $T$ (piccolo $\beta$).

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \to \int_0^\infty e^{-\beta E}\rho(E)dE$$

dove $\rho(E)$ è la densità dei livelli. Ammettiamo che per $E > E_M$ la distribuzione sia $\rho(E) = c_1 E^\alpha$ con $\alpha > -1$. Per piccolo $\beta$ sia ha

$$Z = \int_0^{E_M} \rho(E)dE + c_1\beta^{-\alpha-1}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx \approx c_1\beta^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$$

da cui scende

$$\bar{E} = \frac{\alpha+1}{\beta} = (\alpha+1)kT$$

Se non si vuole violare la legge di Rayleigh-Jeans valida a piccole frequenze dobbiamo scegliere $\alpha = 0$ (spaziatura asintotica costante). Questa viene estesa a tutte le energie.

Se $\alpha < -1$ si ha

$$\int_0^\infty \rho(E)dE < \infty$$

cioè un numero finito $N$ di livelli. In questo caso per $T \to \infty$ abbiamo

$$\bar{E} = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \to \frac{E_1 + \ldots + E_N}{N}$$

cioè la media delle energie. Di nuovo violiamo Rayleigh-Jeans.

Fluttuazioni della energia nel corpo nero

Il valore medio del quadrato delle fluttuazioni della energia è dato da

$$-\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = \overline{(E^2)} - (\bar{E})^2 = \overline{(\Delta E)^2} = kT^2 C_V$$

Partendo dalla formula di Planck

$$\bar{E} = \frac{8\pi\nu^2 h\nu}{c^3(e^{h\nu/kT} - 1)} \Delta\nu V \equiv h\nu \mathcal{N}_p$$

si ricava

$$\overline{(\Delta E)^2} = h\nu \bar{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 \Delta\nu V} \bar{E}^2 = (h\nu)^2 \mathcal{N}_p + \frac{\bar{E}^2}{\mathcal{N}_w}$$

Il primo termine è la tipica fluttuazione particellare con $\mathcal{N}_p$ sistemi indipendenti $(\Delta E)^2 = \varepsilon_0 E \sim \mathcal{N}_p$. La seconda parte invece non contiene $h$ e come tale è un contributo classico ondulatorio alle fluttuazioni della energia. Infatti il numero di onde classiche in $V$, $\Delta\nu$ è dato da

$$\mathcal{N}_w = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu V}{c^3}$$

e se scriviamo

$$\bar{E} = \epsilon(\nu) \mathcal{N}_w$$

ci attendiamo una fluttuazione

$$\Delta E = \epsilon(\nu) \sqrt{\mathcal{N}_w}$$

cioè

$$\overline{(\Delta E)^2} = \epsilon(\nu)^2 \mathcal{N}_w = \bar{E}/\mathcal{N}_w.$$

Esempio di radiazione nera: la radiazione di fondo cosmico.

Disaccoppiamento della radiazione: 400 000 Yr quando universo aveva un volume $1000^{-3}$ volte il volume attuale. $T \approx 2.725\ K$.

Temperatura di disaccoppiamento $3000K$ consistente con $V_2/V_1 = T_1^3/T_2^3 = 1000^3$.

Correzione per una velocita' della terra 600 Km/sec.

Legge di Wien e conservazione del numero dei fotoni durante una compressione adiabatica.

Il numero dei fotoni è dato da

$$dn = \frac{1}{h}(\frac{\nu}{T})^2 f(\frac{\nu}{T})T^3 V \frac{d\nu}{T}$$

Cioè

$$N = \frac{T^3 V}{h} \int_0^\infty x^2 f(x) dx$$

che sotto una trasformazione adiabatica $VT^3 =$ const resta invariato.

Impulso del fotone ed effetto Doeppler.

$$\delta\nu = 2\frac{v}{c}\nu\cos\theta$$

con $v << c$ velocità dello specchio.

$$L = \int F_x v dt = v \int F_x dt = v\Delta p_x = v\ 2\ p\cos\theta = \Delta E$$

consistente con $p = \frac{h\nu}{c}$ $E = h\nu$.

071003