

## Misura in meccanica quantistica

Richiamiamo l'assioma fondamentale sui risultati di una misura: Dato uno stato  $\psi$  se si effettua una misura della osservabile  $F$  su  $\psi$  la probabilità di ottenere il valore  $f_i$  dello spettro è dato da  $|c_i|^2$  essendo  $c_i$  il coefficiente che compare nello sviluppo di  $\psi$  in autostati di  $F$  i.e.  $\psi = \sum_i c_i \phi_i$ . Usando lo sviluppo in autostati standard abbiamo invece  $\psi = \sum_i c_i^{(n)} \phi_i^{(n)}$  e  $\text{Prob}(f_i) = \sum_n |c_i^{(n)}|^2$ .

Abbiamo dato la giustificazione di questa formula generalizzando l'ipotesi di Born. Si potrebbe tentare di giustificarla pure per altra via (e.g. Gottfried). Un problema fondamentale è: che cosa accade dopo la misura, cioè quale è lo stato che descrive il sistema dopo la misura se ho ottenuto come risultato della misura il valore  $f_i$ .

Una prima classificazione dei processi di misura è la distinzione tra misure ripetibili e misure non ripetibili. Diremo che una misura di una certa quantità è ripetibile se ripetendo la misura della stessa quantità sul sistema immediatamente dopo la prima misura si ottiene con certezza il risultato precedentemente ottenuto.

Esempio di misura non ripetibile: la misura della energia della particella mediante la ionizzazione. Esempio di misura ripetibile: l'esperimento di Stern e Gerlach.

Se un apparato effettua una misura ripetibile è un fatto di cui ci si può accertare sperimentalmente.

Se il valore per cui accetto il sistema è un valore dello spettro che è non degenere e se la misura è ripetibile concludo che il sistema è finito nell'autostato di  $F$  relativo al valore dello spettro  $f_i$ . Quindi nel caso di misura ripetibile in cui si accetta il sistema se si misura un valore dello spettro non degenere l'operazione di misura coincide con quella di preparazione dello stato. Questo può pure essere espresso dicendo che in tale processo di misura si è attuata la evoluzione  $\psi \rightarrow \phi_i$ ; se ammettiamo che tale evoluzione sia lineare (non vogliamo rinunciare alla linearità) abbiamo che tale transizione è data da  $\psi \rightarrow \phi_i = P_i \psi$  essendo  $P_i$  il proiettore  $\phi_i \circ \phi_i$ . Si noti che questa trasformazione lineare non conserva la norma e pertanto non è unitaria; e ricordiamo che non si può effettuare una ulteriore trasformazione che riporti la norma ad uno senza perdere la linearità. Si noti tra l'altro che la probabilità di ottenere  $f_i$  è data da  $(\psi, P_i \psi)$ .

Più delicato è il problema nel caso in cui il valore  $f_i$  è degenere. Infatti non basta dire che la misura è ripetibile per conoscere lo stato in cui è finito il sistema. Introduciamo la nozione di misura fortemente ripetibile (o meglio di apparato che esegue misure fortemente ripetibili) caratterizzata dalla seguente proprietà: se lo stato iniziale è tale che la misura di  $F$  dà con sicurezza il valore  $f_i$ , cioè è un autostato di  $F$ , allora la misura di  $F$  lascia lo stato immutato. Questa è una proprietà sperimentalmente accertabile.

Infatti ammettiamo che ripetute misure di  $F$  diano sempre lo stesso risultato  $f_i$ . Da questo concludiamo che lo stato iniziale è un autostato di  $F$  al valore  $f_i$ . Possiamo eseguire su questo stato tutte le possibili misure e sappiamo che queste lo caratterizzano completamente. Misuriamo ora  $F$ , ottenendo ovviamente  $f_i$ . Facciamo tutte le misure possibili sullo stato dopo tale misura e troviamo che esso è lo stesso stato che avevamo prima della misura di  $F$ . Se questo accade diremo che il nostro apparato sperimentale effettua una misura fortemente ripetibile. Indichiamo con  $A_i$  la trasformazione lineare che corrisponde alla selezione degli stati finali che sono autostati di  $F$  all'autovalore  $f_i$  cioè per cui il risultato della misura di  $F$  è stata  $f_i$ . (Si pensi all'esperimento di Stern e Gerlach in cui tiene aperta solo una apertura). Sugli autostati di  $F$  al valore  $f_i$ ,  $A_i$  agisce come segue (misura fortemente ripetibile)

$$A_i\phi = \alpha(\phi)\phi$$

Se non vogliamo rinunciare alla linearità della trasformazione abbiamo  $\alpha(\phi) = \alpha$  e quindi  $A_i/\alpha$  è l'operatore identità su questo autosottospazio. Sugli autovettori di  $F$  ad un valore diverso  $f_j$  si ha

$$A_i\phi_j = 0$$

perchè altrimenti avrei che uno stato che dava con sicurezza  $f_j$  passa il test di misura di selezione  $A_i$  il che è contraddittorio con la formula della probabilità di misura di  $f_i$ . Cioè se  $A_i\phi_j = \zeta \neq 0$   $\zeta$  sarebbe autostato di  $F$  al valore  $f_i$  in quanto la misura è ripetibile (oltre che fortemente ripetibile) ma questo non è possibile perchè essendo la misura ripetibile la misura di  $F$  lascia  $\phi_j$  autostato di  $F$  al valore  $f_j \neq f_i$ . Concludiamo che  $A_i$  a parte un fattore è l'operazione di proiezione  $P_i$  sull'autosottospazio di  $F$  all'autovalore  $f_i$ . Questa proprietà di proiezione delle misure di prima specie fortemente ripetibili viene pure chiamata, per ovvie

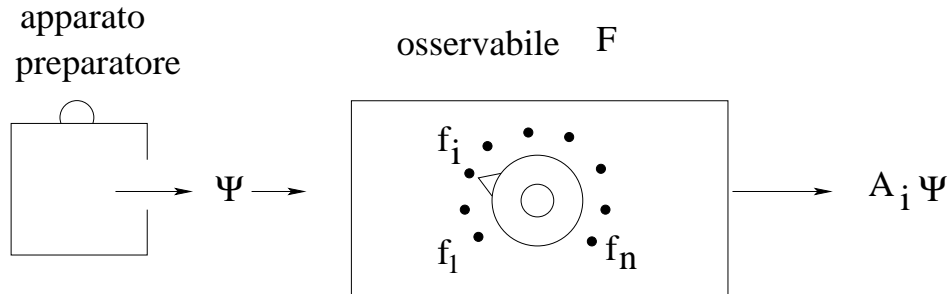


Fig.1 Apparato di Stern-Gerlach generalizzato: L'apparato di misura lascia passare solo i sistemi per cui è stato misurato il valore  $f_i$  dello spettro di  $F$ .

ragioni, la proprietà di minimo disturbo.

Si noti di nuovo come la probabilità di trovare tale valore  $f_i$  è dato da  $\text{Prob}(f_i) = (\psi, P_i \psi)$ . Nel caso in cui il sistema sia descritto da un operatore statistico è facile trovare come questo cambia in seguito alla misura. Se selezioniamo i sistemi per i quali l'apparato di misura ha misurato il valore  $f_i$ , dato che ogni stato  $\psi$  viene mutato in  $P_i \psi / \|P_i \psi\|$  (misura fortemente ripetibile) e questo accade con probabilità  $(P_i \psi, P_i \psi)$  sia ha che l'operatore statistico dopo la misura è dato da  $P_i W P_i$ . Si noti che tale operatore statistico non è più normalizzato cioè si ha in generale  $\text{tr} P_i W P_i < 1$ . Ciò è dovuto al fatto che un certo numero di sistemi vanno persi. Si può normalizzare dividendo per la sua traccia i.e. il nuovo operatore statistico normalizzato è dato da

$$W' = \frac{P_i W P_i}{\text{tr}(W P_i)}.$$

La probabilità di trovare  $f_i$  nella misura di  $F$  su  $W$  è data da  $\sum_j \rho_j (\psi_j, P_i \psi_j)$  cioè proprio da  $\text{tr}(W P_i)$ .

Vogliamo ora, date due osservabili  $F$  e  $G$ , calcolare la probabilità composta di trovare in due misure successive prima  $f_i$  e poi  $g_j$ . Tale probabilità è data da

$$\text{Prob}(f_i, g_j) = \text{tr}(W P_i) \text{tr}(W' Q_j) = \text{tr}(P_i W P_i Q_j).$$

Potremmo procedere con molte misure, ma ci limitiamo a considerarne due. Invece la probabilità di trovare su  $W$  prima  $g_j$  e poi  $f_i$  è data da

$$\text{Prob}(g_j, f_i) = \text{tr}(WQ_j)\text{tr}(W'P_i) = \text{tr}(Q_jWQ_jP_i).$$

In generale queste due probabilità sono diverse, contrariamente a quanto sappiamo sperimentalmente accadere nel caso classico. E' semplice vedere che se  $P_i$  commuta con  $Q_j$  allora le due probabilità composte sono uguali: Infatti in questo caso  $P_iQ_jP_i = P_i^2Q_j = P_iQ_j = Q_jP_iQ_j$ . Ammettiamo ora di osservare sperimentalmente che le due probabilità composte suddette siano uguali, qualunque sia lo stato  $W$  e qualunque siano gli indici  $i$  e  $j$ . Data la arbitrarietà dello stato  $W$ , (si pensi e.g. agli stati puri) abbiamo che  $P_iQ_jP_i = Q_jP_iQ_j$  per tutte le scelte degli indici  $i$  e  $j$ . E' facile ora vedere che ciò implica che  $[P_i, Q_j] = 0$ , per tutte le coppie  $i, j$ . Infatti

$$P_i = P_i^2 = \sum_k P_iQ_kP_i = \sum_k Q_kP_iQ_k$$

da cui deriviamo che

$$P_iQ_j = Q_jP_iQ_j = Q_jP_i$$

che è quanto volevamo dimostrare. Se ora consideriamo le rappresentazioni spettrali degli operatori

$$F = \sum_i f_i P_i \quad G = \sum_j g_j Q_j$$

si ha che  $[F, G] = 0$ . Viceversa se  $F$  e  $G$  commutano si ha che esiste un insieme completo  $\phi_{ijn}$  di autostati comuni ad  $F$  e  $G$  i.e.

$$F\phi_{ijn} = f_i\phi_{ijn} \quad G\phi_{ijn} = g_j\phi_{ijn}.$$

da cui

$$P_i = \sum_{k,n} \phi_{ikn} \cdot \phi_{ikn} \quad Q_j = \sum_{h,m} \phi_{hjm} \cdot \phi_{hjm}$$

e

$$P_iQ_j = \sum_n \phi_{ijn} \cdot \phi_{ijn} = Q_jP_i.$$

Riassumendo: la commutatività temporale della misura di  $F$  e  $G$  a livello di statistica implica la commutatività matematica degli operatori che rappresentano le osservabili  $F$  e  $G$  e viceversa.

#### Bibliografia

K. Gottfried : Quantum Mechanics, W. A. Benjamin, 1966 New York.

E.B. Davies: Quantum mechanics of open systems, Academic Press, 1976 London.

J.S. Bell : Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

J.A. Wheeler and W.H.Zurek: Quantum theory of measurement, Princeton University Press, 1983 Princeton.