Particelle identiche

Non esistono differenze osservabili quando si scambiano due particelle identiche. In meccanica quantistica però sorgono dei fenomeni che non hanno l'analogo in fisica classica. E' possibile distinguere due stati che differiscono per lo scambio di due particelle? Classicamente sì perchè le due particelle possono venire distinte per es. dalle diverse condizioni iniziali. Questo presuppone la possibilità di seguire le particelle lungo il loro cammino. Ciò sappiamo, non è possibile in meccanica quantistica e questo dà luogo ad una impossibilità operativa nel distinguere due stati in cui per esempio due elettroni sono stati scambiati. In maniera sorprendente (e soddisfacente) questa indistinguibilità è qualcosa di più che operativa ma risulta in alcuni assiomi nuovi della teoria che restringono gli stati possibili quando siamo in presenza di particelle identiche.

Consideriamo n particelle identiche: possiamo descrivere la prima particella con delle variabili dinamiche ξ_1 (per es. $\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{s}_1$) la seconda con ξ_2 etc... . Riferendosi a sistemi diversi avremo che le ξ_1 commutano con le ξ_2 etc... . Il fatto che le particelle sono identiche si traduce nel fatto che la hamiltoniana sarà una funzione simmetrica delle variabili ξ_1, ξ_2 etc.. cioè invariante sotto lo scambio di due qualunque particelle e questo deve accadere qualunque sia la perturbazione fisica cui il sistema è soggetto (questo è ovviamente vero anche in fisica classica). Se indichiamo con $\psi_a^{(1)}$, $\psi_b^{(1)}$ .... una base di vettori che descrivono la prima particella, avremo analoghi vettori $\psi_a^{(2)}$, $\psi_b^{(2)}$... che descrivono la seconda particella etc.... Lo spazio di Hilbert H_n che descrive il sistema di n particelle è in maniera naturale il prodotto diretto degli spazi di Hilbert delle singole particelle di cui una base è data da $\psi_a^{(1)}\psi_b^{(2)}\psi_c^{(3)}$.... ed una base siffatta viene chiamata (Dirac) una base simmetrica. Se scambiamo due particelle tra di loro per es. 1 con 2 lo stato precedentemente scritto in generale cambia, cioè si trasforma in $\psi_a^{(2)}\psi_b^{(1)}\psi_c^{(3)}$..... Con questo non cambiano certo i valori medi delle osservabili fisiche, che sono simmetriche nello scambio delle variabili dinamiche ξ_1,..... ξ_n. Chiaramente vettori fattorizzati del tipo sopra scritto non esauriscono lo spazio di Hilbert, nel senso che questo sarà costituito da vettori sovrapposizioni arbitrarie di vettori siffatti. Lo scambio di due particelle genera una trasformazione lineare nello spazio di Hilbert H_n ed è immediato rendersi conto che questo operatore che rappresenta lo scambio non dipende dalla particolare base simmetrica in H_n. Dato quindi un qualunque vettore $\psi \in H_n$ possiamo considerare la azione di una qualunque permutazione su di esso $P\psi$ e avremo una rappresentazione lineare del gruppo delle permutazioni. Tra i vettori di H_n ve ne sono alcuni che sotto l'azione di P cambiano solo per una fase, cioè ψ e $P\psi$ rappresentano lo stesso stato qualunque sia $P \in S_n$ essendo S_n il gruppo delle permutazioni di n oggetti. In questo caso dato uno ψ siffatto, lo spazio unidimensionale dei vettori $\{P\psi\}$ è la base di una rappresentazione unidimensionale di S_n. E' un semplice esercizio dimostrare che ci sono solo due possibilità: a) $P\psi = \psi$ per qualunque $P \in S_n$; b) $P\psi = \delta_P \psi$ essendo $\delta = \pm 1$ a seconda che P sia una permutazione pari o dispari e si ha $\delta_{PQ} = \delta_P \delta_Q$. Nel primo caso il vettore ψ verrà detto simmetrico e nel secondo caso il vettore ψ verrà detto antisimmetrico. Il fatto importante è che queste proprietà di simmetria o antisimmetria vengono conservate nel tempo a causa della simmetria rispetto allo scambio dell'operatore di evoluzione, cioè della hamiltoniana H.

Cioè dato che $P\ H = H\ P$ qualunque P, si ha $P\ H\psi = H\ P\psi = \pm H\ \psi$ e quindi se $P\ \psi = \pm\psi$ si ha $P(\psi + \frac{\epsilon}{ih} H\psi) = \pm(\psi + \frac{\epsilon}{ih} H\ \psi)$. Quindi uno stato che è inizialmente simmetrico rimane simmetrico, uno che è antisimmetrico rimane antisimmetrico. Sussiste quindi la possibilità <u>consistente</u> che per certi tipi di particelle solo stati simmetrici vengano realizzati in natura, e per altri solo stati antisimmetrici. Questo realizzerebbe tra l'altro una peculiarità formale di notevole eleganza: stati tra di loro indistinguibili vengono descritti dallo stesso raggio nello spazio di Hilbert; infatti l'operatore di scambio P al massimo altera il segno del vettore. In realtà ciò è quanto accade in natura. Si trova infatti che tutti i dati sperimentali sono in accordo con il seguente assioma (di statistica): Le particelle di spin semiintero, detti fermioni, sono descritte da vettori antisimmetrici e quelle di spin intero, detti bosoni, da vettori simmetrici sotto scambio delle particelle.

Vediamo ora come uno può costruire all'interno della spazio di Hilbert H_n stati simmetrici o antisimmetrici. Se partiamo dai vettori $\psi_a^{(1)}$, $\psi_b^{(2)}$,......$\psi_g^{(n)}$, con $a, b, c \ldots$ non necessariamente diversi tra di loro, un vettore simmetrico è immediatamente costruito con l'operazione

$$\psi_S = \sum_P P\ \psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} \ldots\ldots \psi_g^{(n)}$$

Per uno stato siffatto possiamo semplicemente dire che esistono n_a particelle nello stato a, n_b particelle nello stato b etc.. senza poter specificare quali particelle occupano questi stati. Un vettore antisimmetrico è facilmente costruito in maniera analoga

$$\psi_A = \sum \delta_P P\ \psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} \ldots\ldots \psi_g^{(n)}$$

che equivale al determinante

$$\begin{vmatrix} \psi_a^{(1)} & \psi_a^{(2)} & \ldots & \psi_a^{(n)} \\ \psi_b^{(1)} & \psi_b^{(2)} & \ldots & \psi_b^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_g^{(1)} & \psi_g^{(2)} & \ldots & \psi_g^{(n)} \end{vmatrix}$$

Un risultato immediato è che se due indici e.g. a e b sono uguali , a causa della antisimmetria si ha $\psi_A = 0$, come pure si vede dal fatto che deve simultaneamente valere

$$P_{12} \psi_A = \psi_A$$

e

$$P_{12} \psi_A = -\psi_A$$

Quindi non possono esitere due fermioni identici nello stesso stato. Gli stati descritti sopra non sono gli unici stati simmetrici o antisimmetrici in H_n. Combinazioni lineari di più stati simmetrici o antisimmetrici del tipo sopra scritto non sono scrivibili nella forma di sopra pur mantenendo la proprietà di simmetria o di antisimmetria. Lo spazio di Hilbert fisico è dato da H_n^S o da H_n^A a seconda che le particelle siano bosoni o fermioni.

Questo assioma ha delle conseguenze molto importanti sulla statistica delle particelle, cioè sul conteggio degli stati e quindi sul calcolo delle medie che intervengono in termodinamica statistica. Infatti a seconda che le particelle siano bosoni o fermioni, le tracce che danno i valori medi statistici di osservabili, vanno prese sul sottospazio di H_n simmetrico H_S, oppure su quello antisimmetrico H_A

$$\langle F\rangle = \mathrm{Tr}_{H_S}(Fe^{-\beta H})/\mathrm{Tr}_{H_S}(e^{-\beta H}); \quad \langle F\rangle = \mathrm{Tr}_{H_A}(Fe^{-\beta H})/\mathrm{Tr}_{H_A}(e^{-\beta H});$$

Notiamo come in via del tutto generale, cioè indipendentemente dal principio di spin e statistica, una permutazione $P \in S_n$ induce una trasformazione unitaria nello spazio di Hilbert H_n; ciò lo si vede da come P opera sui vettori di un base simmetrica per cui

$$(P\psi^{(1)}_{a'}\psi^{(2)}_{b'}....\psi^{(n)}_{g'}, P\psi^{(1)}_{a}\psi^{(2)}_{b}....\psi^{(n)}_{g}) = (\psi^{(1)}_{a'}\psi^{(2)}_{b'}....\psi^{(n)}_{g'}, \psi^{(1)}_{a}\psi^{(2)}_{b}....\psi^{(n)}_{g})$$

E' noto come l'interazione dello spin di una particella con gli altri gradi di libertà e con lo spin di altre particelle è un fenomeno relativistico, che negli atomi leggeri è stimato dell'ordine $(\frac{1}{137})^2$. Quindi è un ottimo procedimento trascurare in approssimazione zero lo spin nella hamiltoniana ed introdurre le interazioni dovute allo spin successivamente come una perturbazione.

Data ora una hamiltoniana che dipende solo dalle coordinate e dai momenti coniugati, vogliamo esaminare le proprietà di simmetria sotto permutazioni delle soluzioni dell'equazione di Schroedinger agli autovalori, indipendentemente dal principio di spin e statistica; i risultati raggiunti verranno poi combinati con i gradi di libertà di spin per ottenere vettori di stato simmetrici o antisimmetrici.

Consideriamo per il caso di due particelle una soluzione della equazione di Schroedinger

$$H\psi(q_1, q_2) = E\psi(q_1, q_2)$$

La identità delle due particelle implica il fatto che la hamiltoniana commuta con gli elementi del gruppo delle permutazioni che in questo semplice caso sono due i.e. l'identità e P_{12} Questa simmetria ci permette di derivare dalla $\psi(q_1, q_2)$ un'altra soluzione. Infatti

$$P_{12} H \psi(q_1, q_2) = H P_{12} \psi(q_1, q_2) = E P_{12} \psi(q_1, q_2)$$

Notiamo che questo vettore $P_{12}\psi(q_1, q_2)$ non può essere nullo in quanto $P_{12}^2 = 1$. Quindi se il nuovo vettore $P_{12}\psi(q_1, q_2)$ non è proporzionale a $\psi(q_1, q_2)$ abbiamo a disposizione un sottospazio bidimensionale di soluzioni alla energia E. E' assai utile vedere questo spazio bidimensionale come la somma diretta di due spazi unidimensionali invarianti sotto il gruppo P. Formiamo infatti i due vettori

$$\psi(q_1, q_2) + P_{12}\psi(q_1, q_2) \qquad \psi(q_1, q_2) - P_{12}\psi(q_1, q_2)$$

Si ha che

$$P_{12}(\psi(q_1, q_2) \pm P_{12}\psi(q_1, q_2)) = \pm(\psi(q_1, q_2) \pm P_{12}\psi(q_1, q_2))$$

e quindi i due spazi unidimensionali generati da $\psi(q_1, q_2) \pm P_{12}\psi(q_1, q_2)$ sono invarianti. Ovviamente può accadere che già la $\psi(q_1, q_2)$ di partenza sia o simmetrica o antisimmetrica rispetto allo scambio nel qual caso uno dei due vettori $\psi(q_1, q_2) \pm P_{12}\psi(q_1, q_2)$ si annulla e abbiamo solo un spazio unidimensionale. Nel caso caso generale di n particelle identiche data una soluzione della equazione di Schroedinger

$$H\psi(q_1, q_2, \dots q_n) = E\psi(q_1, q_2, \dots q_n)$$

possiamo da questa costruire uno spazio lineare di soluzioni applicando a questa soluzione il gruppo delle permutazioni

$$P\psi(q_1, q_2, \dots q_n)$$

In questo modo otteniamo uno spazio che è al più $n!$ dimensionale.

Di nuovo è importante decomporre questo spazio lineare in sottospazi invarianti sotto il gruppo delle permutazioni. Consideriamo il caso semplice anche se non banale di tre particelle. Una arbitraria funzione d'onda $\psi(q_1, q_2, q_3)$ può essere riscritta come la somma delle seguenti quattro funzioni d'onda

$$\psi(q_1, q_2, q_3) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \quad \psi(q_1, q_2, q_3) \quad + \quad \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \quad \psi(q_1, q_2, q_3) \quad +$$

$$\begin{array}{|c|c}\hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \psi(q_1, q_2, q_3) \quad + \quad \begin{array}{|c|c}\hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \psi(q_1, q_2, q_3) =$$

$$\frac{1}{6}[(123) + (132) + (213) + (231) + (312) + (321)]+$$

$$+\frac{1}{3}[(123) + (213) - (321) - (231)]+$$

$$+\frac{1}{3}[(123) + (321) - (213) - (312)]+$$

$$\frac{1}{6}[(123) - (132) - (213) + (231) + (312) - (321)]$$

Il simbolo $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$ è il simmetrizzatore, il simbolo $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ è l'antisimmetrizzatore mentre

il simbolo $\begin{array}{|c|c}\hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ significa , prima simmetrizzare rispetto ad 1 e 2 e poi antisimmetrizzare il

risultato così trovato rispetto a 1 e 3. In maniera analoga il simbolo $\begin{array}{|c|c}\hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ significa , prima simmetrizzare rispetto ad 1 e 3 e poi antisimmetrizzare il risultato così trovato rispetto a 1 e 2.

Se applichiamo un elemento del gruppo delle permutazioni a $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\ \psi$ troviamo lo stesso vettore e quindi $\{P\}\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\ \psi$ è uno spazio unidimensionale. In maniera analoga $\{P\}\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\ \psi$ dà luogo ad una rappresentazione unidimensionale perchè

$$Q\sum_P \delta_P P\psi = \sum_P \delta_P QP\psi = \delta_P \sum_P \delta_{PQ} QP\psi = \delta_Q \sum_P \delta_P P\psi.$$

Cioè se applichiamo un elemento del gruppo delle permutazioni troviamo lo stesso vettore moltiplicato per 1 o -1 a seconda che la permutazione sia pari o dispari.

Esaminiamo ora il sottospazio $\{P\}\alpha$ con $\alpha = (123) + (213) - (321) - (231)$.

Abbiamo

$$P_{12}\alpha = P_{12}[(123) + (213) - (321) - (231)] =$$

$$= (213) + (123) - (312) - (132) \equiv \beta$$

$$P_{12}\beta = P_{12}[(213) + (123) - (312) - (132)] =$$

$$= (123) + (213) - (321) - (231) = \alpha$$

come ovvio dato che $P_{12}^2 = 1$.

$$P_{13}\alpha = P_{13}[(123) + (213) - (321) - (231)] =$$

$$= (321) + (231) - (123) - (213)] = -\alpha$$

$$P_{13}\beta = P_{13}[(213) + (123) - (312) - (132)] =$$

$$= (231) + (321) - (132) - (312)] = -\alpha + \beta$$

P_{12} e P_{13} generano tutto il gruppo delle permutazioni di tre elementi: infatti

$$P_{12}(123) = (213);\ P_{13}(213) = (231);\ P_{12}(231) = (132);$$

$$P_{13}(132) = (312);\ P_{12}(312) = (321);$$

Nella base $v_1 = \alpha,\ v_2 = \beta$ abbiamo la rappresentazione

$$Pv_i = \sum_j v_j P(j,i)$$

con

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P_{13} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da queste mediante moltiplicazione possiamo calcolare i rappresentativi di tutte le permutazioni.

In maniera analoga si può calcolare la rappresentazione generata da $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\ \psi \quad \equiv \gamma.$

$$P_{12}\gamma = -\gamma, \quad P_{12}\epsilon = -\gamma + \epsilon, \quad P_{13}\gamma = \epsilon, \quad P_{13}\epsilon = \gamma$$

e abbiamo quindi la seguente rappresentazione

$$P'_{12} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le due rappresentazioni trovate sono equivalenti per una trasformazione di similitudine. Infatti dato

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha $PS = SP'$ che basta ovviamente verificare per P_{12} e P_{13}. Questo è un fatto generale: rappresentazioni generate da tabelle di Young aventi lo stesso diagramma di Young sono

equivalenti. E' un semplice esercizio dimostrare che lo spazio descritto da α e β è bidimensionale o nullo, cioè se si pone $\beta = c\alpha$ si ha $\alpha = 0$ e che queste due rappresentazioni, (cioè α, β e γ, ϵ), sono irriducibili, cioè che se il sottospazio $\alpha + c\beta$ fosse invariante si ha $\alpha = \beta = 0$. Questo è un risultato generale: gli spazi generati applicando il gruppo delle permutazioni ad una funzione simmetrizzata mediante un simmetrizzatore di Young sono irriducibili. I due sottospazi (α, β) e (γ, ϵ) non sono sempre indipendenti, nel senso che uno di essi può essere identicamente nullo, oppure può accedere che siano lo stesso spazio bidimensionale.
Si verifica però che i vettori appartenenti a spazi generati da diagrammi di Young diversi (cioè simmetrico, antisimmetrico e misto) sono ortogonali. Questo è pure un risultato generale.

Nota: Il fatto che funzioni d'onda appartenenti a rappresentazioni irriducibili inequivalenti, cioè a diversi diagrammi di Young sono ortogonali è una conseguenza generale della ortogonalità delle rappresentazioni inequivalenti

$$(\psi_i, \phi_j) = \frac{\sum_P (P\psi_i, P\phi_j)}{n!} = \sum_P \sum_k \sum_h P^*(k,i) P'(h,j) (\psi_k, \phi_h)$$

dove $P(k,i)$ è la rappresentazione cui appartiene ψ_i e $P'(k,i)$ è la rappresentazione cui appartiene ϕ_j. Ma il teorema di ortogonalità degli elementi di matrice delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti ci dice che

$$\sum_P P^*(k,i) P'(h,j) = 0$$

Abbiamo visto che data una funzione d'onda generica applicando ad essa il gruppo delle permutazioni otteniamo uno spazio a $n!$ dimensioni; nel nostro esempio a 6 dimensioni. Si noti come abbiamo tre rappresentazioni inequivalenti, due ad una dimensione e due equivalenti a due dimensioni. Pure questo è un risultato generale: nella decomposizione del generico vettore in rappresentazioni irriducibili ciascuna rappresentazione inequivalente compare un numero di volte pari alla dimensione della rappresentazione stessa e quindi (teorema di Burnside) la somma dei quadrati delle dimensioni delle rappresentazioni inequivalenti uguaglia la dimensione del gruppo che è $n!$.

Nel caso in cui la funzione d'onda non sia generica ma per esempio una soluzione stazionaria della equazione di Schroedinger, non è detto che lo spazio generato applicando il gruppo delle permutazioni sia $n!$ dimensionale, nel nostro esempio 6 dimensionale.

Vogliamo ora vedere quali sono le possibili dimensioni di questo spazio per una generica hamiltoniana che sia invariante sotto il gruppo delle permutazioni. Cioè ammettiamo che inizialmente lo spazio di un livello energetico sia effettivamente 6 volte degenere. Ci si chiede in quanti livelli e con quali degenerazioni si può rompere questo livello se si aggiunge alla hamiltoniana di partenza una qualunque perturbazione il cui unici requisiti fisici siano di essere hermitiana e invariante sotto permutazioni (se esistesse una perturbazione non invariante sotto permutazione vorrebbe dire che abbiamo scoperto un modo per distinguere le particelle le quali non sarebbero più identiche).

Premettiamo un semplice risultato: Se $\{P\}$ è un gruppo di trasformazioni unitarie in $\mathcal{H}$ e V è un sottospazio invariante sotto tale gruppo di trasformazioni anche il suo complemento ortogonale $V_\perp$ è invariante sotto tale gruppo di trasformazioni. Infatti se $w \in V_\perp$ per qualunque $v \in V$ e qualunque P si ha $(v, Pw) = (P^+v, w) = (P^{-1}v, w) = 0$ perchè $P^{-1}v \in V$ e quindi $Pw \in V_\perp$. In questo modo si può decomporre $\mathcal{H}$ successivamente in sottospazi invarianti ortogonali fino a raggiungere una decomposizione in sottospazi invarianti irriducibili ortogonali. Inoltre se V è invariante il proiettore su V, $\mathcal{P}_V$ commuta con tutte le P. Infatti

$$\mathcal{P}_V P x = \mathcal{P}_V P(\mathcal{P}_V x + (1 - \mathcal{P}_V)x) = P_V P P_V x$$

mentre

$$P\mathcal{P}_V x = P\mathcal{P}_V(\mathcal{P}_V x + (1 - \mathcal{P}_V)x) = P\mathcal{P}_V x = \mathcal{P}_V P\mathcal{P}_V x$$

La hamiltoniana più semplice che rompe la degenerazione è data da una opportuna combinazione di proiettori su sottospazi invarianti ortogonali. Abbiamo visto come il vettore simmetrico genera uno spazio invariante che è ortogonale a quello generato dal vettore antisimmetrico i quali a loro volta sono ortogonali allo spazio quadridimensionale generato dalle due tabelle di Young. Si consideri all'interno di questo spazio quadridimensionale il vettore $a\alpha + a'\alpha'$. Applicando ad esso tutti gli elementi del gruppo delle permutazioni generiamo lo spazio bidimensionale $(a\alpha + a'\alpha', a\beta + a'\beta')$. Consideriamo ora il complemento ortogonale rispetto allo spazio quadridimensionale di questo spazio bidimensionale. In linea del tutto generale, se abbiamo un sottospazio V che è invariante sotto il gruppo delle permutazioni il proiettore su questo sottospazio commuta con tutte le permutazioni. Infatti scelta una base ortonormale v_1 in tale sottospazio il proiettore è scrivibile come $\mathcal{P} = \sum_i v_i \cdot v_i$ e si ha

$$P\mathcal{P}P^{-1} = P\mathcal{P}P^{+} = \sum_i Pv_i \cdot Pv_i = \sum_i v_i \cdot v_i$$

perchè la trasformazione unitaria P trasforma un sistema ortonormale di V in un sistema ortonormale di V. In questo modo i quattro proiettori sui sottospazi invarianti ortogonali descritti costituiscono quattro operatori hermitiani, che commutano con tutte le permutazioni e quindi una hamiltoniana di perturbazione accettabile è

$$c_1\mathcal{P}_1 + c_2\mathcal{P}_2 + c_3\mathcal{P}_3 + c_4\mathcal{P}_4$$

con c_i reali arbitrari. Ma questa è in grado di rompere il livello degenere in quattro livelli. Quindi una generica hamiltoniana di perturbazione, invariante sotto il gruppo delle permutazioni rompe il livello sei volte degenere in quattro livelli distinti, di cui due non degeneri, cioè quello simmetrico e quello antisimmetrico e due doppiamente degeneri. E' una conseguenza del lemma di Schur che questa degenerazione residua non è ulteriormente rimuovibile. Infatti secondo la teoria delle perturbazioni occorre trovare gli autovalori di $(v_i, H_I v_j)$. Ma dobbiamo avere $PH_I = H_I P$ e si ha

$$(v_i, H_I P v_j) = \sum_k (v_i, H_I v_k) P(k, j)$$

mentre tenendo conto della unitarietà di P si ha

$$(v_i, PH_I v_j) = (P^{-1} v_i, H_I v_j) = (P^+ v_i, H_I v_j) = (\sum_l P^*(i,l) v_l, H_I v_j) = \sum_l P(i,l)(v_l, H_I v_j)$$

e quindi per il lemma di Schur si ha $(v_i, H_I v_j) = c\delta_{ij}$ e non è possibile rimuovere la degenerazione.

Si noti come questa analisi è indipendente dall'assioma della statistica (o spin e statistica); nondimeno è importante per studiare i vettori di stato in presenza di tale assioma. Si tratta cioè di trovare quali vettori di tre particelle identiche sono totalmente simmetrici o totalmente antisimmetrici. Se le particelle sono di spin zero e come tali bosoni, delle funzioni d'onda studiate l'unica accettabile è la $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \end{array}\,\psi$. Veniamo ora al caso di tre particelle identiche di spin 1/2 (fermioni). Uno spinore di spin totale 3/2 è simmetrico rispetto allo scambio delle particelle e quindi l'unico modo di formare un vettore totalmente antisimmetrico è di moltiplicarlo per l'unica funzione d'onda antisimmetrica che abbiamo a disposizione cioè la

$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}\,\psi$.

Ammettiamo ora di avere una combinazione dei vettori α e β con spinori tale che il vettore sia totalmente antisimmetrico. Mostriamo che senza perdere generalità possiamo considerare stati con S_z definito. Infatti possiamo proiettare il nostro stato sugli autosottospazi di S_z usando i proiettori su tali sottospazi, per es. il proiettore $-(S_z - 3/2)(S_z + 1/2)(S_z + 3/2)/2$, il quale essendo simmetrico negli operatori di spin non altera il carattere di simmetria del vettore. Sappiamo già però che $S_z = \pm 3/2$ non sono usabili in quanto completamente simmetrici. Usiamo quindi $S_z = \pm 1/2$, riferendoci per concretezza al caso $S_z = 1/2$. Il più generale vettore con $S_z = 1/2$ è

$$\psi = [a| + + - \rangle + b| + - + \rangle + c| - + + \rangle]\alpha + [d| + + - \rangle + e| + - + \rangle + f| - + + \rangle]\beta.$$

Essendo P_{12} dispari, dovremo avere

$$P_{12}\psi = [a|++-\rangle + b|-++\rangle + c|+-+\rangle]\beta + [d|++-\rangle + e|-++\rangle + f|+-+\rangle]\alpha = -\psi$$

e quindi confrontando i due termini $-a = d,\ -c = e,\ -b = f,\ -d = a,\ -e = c,\ -f = b.$ Segue

$$\psi = [a|++-\rangle + b|+-+\rangle + c|-++\rangle]\alpha - [a|++-\rangle + c|+-+\rangle + b|-++\rangle]\beta.$$

Inoltre

$$P_{13}\psi = -[a|-++\rangle + b|+-+\rangle + c|++-\rangle]\alpha - [a|-++\rangle + c|+-+\rangle + b|++-\rangle](-\alpha+\beta) = -\psi$$

da cui $-a = -c + b,\ -c = -a + a = 0,\ a = -b$, che ci dà infine

$$\psi = [|++-\rangle - |+-+\rangle]\alpha - [|++-\rangle - |-++\rangle]\beta.$$

Dato che con P_{12} e P_{13} si possono comporre tutte le permutazioni, la antisimmetria totale di ψ è provata.

Notare che

$$S_+(|-++\rangle - |+-+\rangle) = 0$$

come pure

$$S_+(|++-\rangle - |-++\rangle) = 0$$

cioè per un ben noto risultato entrambi i vettori di spin sono autostati di spin totale $S = 1/2$. Abbiamo quindi trovato che per due o tre elettroni (particelle di spin 1/2) ad ogni valore dello spin totale corrisponde una ben determinata rappresentazione irriducibile del gruppo delle permutazioni. Pure questo è un risultato generale per n particelle di spin 1/2 che per il teorema di spin e statistica obbediscono alla statistica di Fermi.

940430