

## Osservabili, spettro, autostati e probabilità

1. Due stati dello stesso sistema fisico, prodotti da due apparati preparatori diversi verranno considerati lo stesso stato se danno le stesse distribuzioni statistiche nella misura di una qualunque quantità fisica.
2. Ammettiamo che sia possibile sovrapporre linearmente due o più stati con coefficienti complessi, in altre parole che lo spazio degli stati sia uno spazio vettoriale sui numeri complessi. Questo è giustificato dal successo della descrizione ondulatoria della materia.
3. Data una quantità fisicamente misurabile diremo spettro di questa quantità l'insieme dei possibili risultati di misure su di un qualunque stato dello sistema. Questo spettro è assunto essere un insieme di numeri reali. Spettri complessi corrisponderebbero alla misura "simultanea" di due numeri numeri reali, situazione che vogliamo evitare dato che sappiamo che la misura di una qualunque quantità può alterare in maniera imprevedibile lo stato del sistema. Per semplicità ci riferiamo dapprima a spettri discreti. Diremo autostato di una quantità misurabile uno stato tale che eseguendo su di esso un misura di tale quantità si ottiene con sicurezza un certo valore (dello spettro). Se l'insieme degli autostati di una certa quantità misurabile è completo, tale quantità misurabile verrà chiamata una osservabile.
4. Interpretazione probabilistica dei vettori di stato. Generalizzando l'interpretazione probabilistica di Born della funzione d'onda, postuliamo che la probabilità  $P_A^{(i)}(\psi)$  di trovare il valore  $i$ -esimo dello spettro misurando la osservabile  $A$  sullo stato  $\psi$  sia data da

$$P_A^{(i)}(\psi) = (\psi, K_A^{(i)}\psi)$$

Da questo segue che  $\psi$  e  $e^{i\alpha}\psi$  rappresentano lo stesso stato. Non solo ma se consideriamo il vettore  $\psi' = \rho\psi$  abbiamo che

$$P_A^{(i)}(\psi) = (\psi', \frac{K_A^{(i)}}{|\rho|^2}\psi')$$

per qualunque  $A$  e qualunque  $i$ . Quindi possiamo dire che all'insieme dei vettori  $\rho\psi$ ,  $\rho \neq 0$  (raggio nello spazio di Hilbert) descrivono lo stesso stato. Al vettore nullo non possiamo associare alcuno stato perchè darebbe probabilità identicamente nulle.

Si noti che se  $\psi_1$  è autostato al valore  $a_1$  e  $\psi_2$  è autostato al valore  $a_2$  diverso da  $a_1$  i due stati sono indipendenti. Perché se i due vettori fossero proporzionali rappresenterebbero lo stesso stato e quindi sarebbero sperimentalmente indistinguibili, mentre in realtà sono distinguibili. Più in generale il vettore  $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$  mai sarà il vettore nullo per  $c_1$  e  $c_2$  non entrambi nulli e  $\psi_1$  e  $\psi_2$  rappresentanti stati diversi.

Assumiamo inoltre il seguente principio di sovrapposizione:

Se un stato  $\psi$  si scrive come sovrapposizione di autostati  $\psi_k$  della osservabile  $A$  i risultati possibili della misura di  $A$  su  $\psi$  sono gli  $a_k$  relativi agli  $\psi_k$  che compaiono nello sviluppo di  $\psi$  con coefficienti non nulli.

Ne segue che se  $\psi_1$  e  $\psi'_1$  sono vettori indipendenti entrambi rappresentanti autostati di  $A$  al valore  $a_1$  si ha che misurando  $A$  su  $\psi = c_1\psi_1 + c'_1\psi'_1$  trovo con sicurezza il valore  $a_1$  e quindi  $\psi$  è autostato di  $A$  al valore  $a_1$ . Possiamo quindi parlare di autosottospazi di una osservabile  $A$  relativi ad un valore dello suo spettro.

Essendo l'insieme degli autostati di  $A$  completo, ogni vettore di stato è scrivibile come

$$\psi = \sum_i c_i \psi_i \quad (2)$$

con  $\psi_i$  autostati di  $A$  tutti relativi a valori diversi dello spettro. Questo perché possiamo raccogliere tutti i vettori che rappresentano autostati relativi ad uno stesso valore in un solo autostato. Si noti che una combinazione  $\psi = \sum_i c_i \psi_i$  con non tutti i  $c_i$  uguali a zero non può essere il vettore nullo; perché altrimenti si avrebbe e.g.

$$\psi_1 = -\frac{1}{c_1} \sum_{i>1} c_i \psi_i$$

il che è assurdo perché misurando  $A$  su  $\psi_1$  dovrei trovare solo valori diversi da  $a_1$ . Quindi gli stati  $\psi_i$  sono linearmente indipendenti.

Ci poniamo ora il problema di dare la relazione tra  $P_A^{(i)}(\psi)$  e i coefficienti di sviluppo che compaiono in (2), con  $\psi$  e  $\psi_i$  normalizzati.

Per questo teniamo fissi gli  $\psi_i$  e facciamo variare in maniera opportuna le  $c_i$ .

Secondo il nostro assioma si ha

$$P_A^{(i)}(\psi) = (\psi, K_A^{(i)}\psi)$$

e quindi

$$P_A^{(1)}(\psi) = \sum_{lm} c_l^* A_{lm}^{(1)} c_m.$$

Prendendo un solo  $c_i$  uguale ad 1 e gli altri nulli si deriva  $A_{11}^{(1)} = 1$ ,  $A_{ll}^{(1)} = 0$  per  $l \neq 1$ .

Prendendo lo stato ottenuto normalizzando  $\phi = \varepsilon\psi_1 + \psi_2$  i.e.

$$\psi = \frac{\varepsilon}{N}\psi_1 + \frac{1}{N}\psi_2; \quad N^2 = (\phi, \phi)$$

e imponendo che

$$P_A^{(1)}(\psi) = \frac{\varepsilon * \varepsilon}{N^2} + \frac{\varepsilon *}{N^2} A_{12}^{(1)} + A_{21}^{(1)} \frac{\varepsilon}{N^2} \geq 0; \quad \forall \varepsilon$$

si ha  $A_{12}^{(1)} = A_{21}^{(1)} = 0$ . Considerando lo stato ottenuto normalizzando  $\phi = b_2\psi_2 + b_3\psi_3$  con  $b_2$  e  $b_3$  non entrambi nulli e imponendo

$$P_A^{(1)}(\psi) = \frac{b_2 * A_{23}^{(1)} b_3 + b_3 * A_{32}^{(1)} b_2}{N^2} = 0$$

si ha  $A_{23}^{(1)} = A_{32}^{(1)} = 0$

Abbiamo dunque raggiunto la conclusione

$$P_A^{(i)}(\psi) = c_i^* c_i.$$

Come corollario si ha

$$\sum_i c_i^* c_i = \sum_i P_A^{(i)}(\psi) = 1.$$

Da questo discende la proprietà di ortogonalità. Si consideri infatti  $\phi = \sum_j b_j \psi_j$ ,  $b_j$  non tutti nulli. Sappiamo che tale vettore non è nullo. Se indichiamo con  $N$  la sua norma il vettore normalizzato è  $\psi = \sum_j c_j \psi_j$  con  $c_j = \frac{1}{N} b_j$ . Si ha quindi

$$N^2 = \sum_{lm} b_l^* (\psi_l, \psi_m) b_m = N^2 \sum_k c_k^* c_k = \sum_k b_k^* b_k.$$

Questa identità nei  $b_i$  ci dice che  $(\psi_l, \psi_k) = \delta_{lk}$ . Arriviamo quindi al risultato fondamentale: Autovettori della stessa osservabile relativi a valori diversi dello spettro sono tra loro ortogonali.

Sviluppo standard di un vettore.

Si sceglie in ogni autosottospazio relativo al valore  $a_k$  dello spettro di  $A$  una base ortonormale completa  $\psi_k^{(i)}$ . Ogni vettore può essere scritto nella forma

$$\psi = \sum_{ki} c_k^{(i)} \psi_k^{(i)} = \sum_k c_k \psi_k$$

con

$$\sum_i c_k^{(i)} \psi_k^{(i)} = c_k \psi_k \quad \text{da cui} \quad |c_k|^2 = \sum_i |c_k^{(i)}|^2$$

Segue che

$$P_A^{(i)}(\psi) = \sum_i |c_k^{(i)}|^2$$

### Osservabile a spettro limitato arbitrario

Per semplicità ci riferiamo ad uno spettro limitato, ma per il resto arbitrario (puntuale, continuo... ).

Divisione dello spettro in un numero finito di intervalli  $[a_{i-1}, a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Assioma 1:  $\text{Prob}_A[a_{i-1}, a_i) = (\psi, K_A[a_{i-1}, a_i)\psi)$

Assioma 2: Se misurando  $A$  sullo stato  $\phi_j$  siamo sicuri di ottenere un valore nell'intervallo  $[a_{k_j-1}, a_{k_j})$ , i soli valori che possiamo ottenere misurando  $A$  sullo stato

$$\sum_j \phi_j$$

sono contenuti nella unione degli intervalli  $[a_{k_j-1}, a_{k_j})$ .

Assioma 3 (completezza): Ogni vettore può essere ottenuto come una somma di vettori

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi[a_{i-1}, a_i)$$

con la proprietà che misurando  $A$  su  $\psi[a_{i-1}, a_i)$  (quando  $\psi[a_{i-1}, a_i) \neq 0$ ) siamo sicuri di trovare un valore in  $[a_{i-1}, a_i)$ .

Conseguenza 1: I vettori  $\psi[a_{i-1}, a_i)$  non nulli, sono indipendenti. Altrimenti per qualche  $k$  potremmo scrivere  $\psi[a_{k-1}, a_k)$  come una combinazione di altri; accadrebbe allora che sulla parte sinistra saremmo sicuri di trovare un valore in  $[a_{k-1}, a_k)$  mentre sulla parte destra noi saremmo sicuri di trovare un valore fuori  $[a_{k-1}, a_k)$ .

Conseguenza 2 (unicità): Se

$$\psi = \sum_j \phi_j \quad (k_j \text{ tutti diversi})$$

allora  $\phi_j = \psi[a_{k_j-1}, a_{k_j})$  altrimenti per qualche  $j$  potremmo scrivere  $\phi_j - \psi[a_{k_j-1}, a_{k_j}) \neq 0$  come una combinazione di vettori per i quali la misura dà risultati fuori dall'intervallo  $[a_{k_j-1}, a_{k_j})$ . Quindi la decomposizione

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi[a_{i-1}, a_i)$$

è unica, l'operazione  $\psi \rightarrow \psi[a_{i-1}, a_i)$  è lineare e la decomposizione di  $\psi[a_{i-1}, a_i)$  è se stesso i.e. l'operazione  $\psi \rightarrow \psi[a_{i-1}, a_i) \equiv P_i \psi$  è un proiettore:  $P_i = P_i^2$ . Ripetendo il ragionamento usato nel caso discreto otteniamo

a)  $\text{Prob}_A[a_{i-1}, a_i) = (\psi[a_{i-1}, a_i), \psi[a_{i-1}, a_i))$

b)  $(\psi[a_{j-1}, a_j], \psi[a_{i-1}, a_i]) = 0$  per  $i \neq j$

i.e.  $P_i$  sono proiettori ortogonali. Infatti

$$0 = (P_i\psi, (1 - P_i)\psi) = (\psi, P_i^+(1 - P_i)\psi)$$

$P_i^+ = P_i^+ P_i$  i.e.  $P_i = P_i^+$ ,  $P_i P_j = 0$  per  $i \neq j$ .

Quindi il valore medio delle misure di  $A$  è

$$\bar{a} = \lim_{\max \Delta_i \rightarrow 0} \sum_i a'_i (\psi[a_{i-1}, a_i], \psi[a_{i-1}, a_i]) = \lim_{\max \Delta_i \rightarrow 0} \sum_i a'_i (\psi, P_i \psi) \quad \text{con } a_{i-1} \leq a'_i \leq a_i.$$

Tale limite esiste perchè

$$\sum_i (\psi[a_{i-1}, a_i], \psi[a_{i-1}, a_i]) = 1$$

(Si paragonino due elementi con uno appartenente al raffinamento dei due insiemi di intervalli).

Costruzione dell'operatore  $\hat{A}$ .

$$\lim_{\max \Delta_i \rightarrow 0} \sum_i a'_i \psi[a_{i-1}, a_i] \equiv \hat{A}\psi$$

Tale limite esiste: si paragonino infatti due elementi con uno che appartiene al raffinamento dei due insiemi di intervalli e si noti che a causa della ortogonalità

$$\left\| \sum_i c_i \psi[a_{i-1}, a_i] \right\| \leq \max(|c_i|) \|\psi\| \quad (1)$$

Possiamo porre  $P_i = E(a_i) - E(a_{i-1})$  con  $E(a) = P[-\infty, a)$  e quindi

$$\hat{A} = \lim_{\max \Delta_i \rightarrow 0} \sum_i a'_i (E(a_i) - E(a_{i-1})) \equiv \int a dE(a) \quad (3)$$

dove a causa di (1) la convergenza è uniforme.  $\hat{A}$  è un operatore hermitiano (limitato autoaggiunto) in quanto limite uniforme di operatori hermitiani e abbiamo

$$\bar{a} = (\psi, \hat{A}\psi).$$

La probabilità è data da

$$\text{Prob}_A[a_{j-1}, a_j] = (\psi, (E(a_j) - E(a_{j-1}))\psi)$$

Ogni operatore autoaggiunto (anche illimitato) può essere scritto nella forma (3).

Il “dizionario di trascrizione” tra i proiettori ed il formalismo degli autovettori generalizzati, nel caso più semplice, è

$$P[a, b] = \int_{a-0}^b da' \psi_{a'} \circ \psi_{a'}$$

con  $(\psi_{a'}, \psi_a) = \delta(a - a')$ .

### **Trattazione dello spettro continuo nel formalismo di Dirac**

In questo paragrafo diamo, senza alcuna pretesa di rigore, la trattazione di una osservabile a spettro continuo non degenerare nel formalismo di Dirac, cioè utilizzando uno spazio vettoriale che è più grande dello spazio di Hilbert.

Una quantità fisicamente misurabile  $Q$  la quale abbia uno spettro continuo verrà detta una osservabile se

1) Per ogni punto  $q$  dello spettro è associato un vettore  $|q\rangle$  tale che ogni vettore dello spazio di Hilbert (o meglio un opportuno sottoinsieme di vettori dello spazio di Hilbert denso nello spazio di Hilbert), è scrivibile come sovrapposizione continua di vettori  $|q\rangle$

$$|\varphi\rangle = \int c(q)|q\rangle dq \tag{4}$$

2) Se un vettore  $|\varphi_I\rangle$  è scrivibile come un integrale ristretto all'intervallo  $I$

$$|\varphi_I\rangle = \int_I c(q)|q\rangle dq$$

gli unici valori dello spettro di  $Q$  che posso ottenere misurando  $Q$  su  $|\varphi_I\rangle$  sono contenuti nell'intervallo  $I$ .

Considerando ora combinazioni lineari finite di vettori  $|\varphi_{I_1}\rangle, |\varphi_{I_2}\rangle$  etc. relativi ad intervalli ad intersezione nulla e ragionando esattamente come nel caso a spettro discreto otteniamo i seguenti risultati

a) dato il vettore  $|\varphi\rangle$  normalizzato i.e.  $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$

$$|\varphi\rangle = \int c(q)|q\rangle dq$$

la probabilità di trovare, misurando  $Q$  su  $|\varphi\rangle$ , valori contenuti nell'intervallo  $I$  è dato da  $\langle\varphi_I|\varphi_I\rangle$  con

$$|\varphi_I\rangle = \int_I c(q)|q\rangle dq$$

b) Vettori  $|\varphi_{I_j}\rangle$  relativi ad intervalli ad intersezione nulla sono tra di loro ortogonali.

Dato che per  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  si ha

$$\langle\varphi_{I_2}|\varphi_{I_1}\rangle = \int_{I_2} \int_{I_1} c_2^*(q)\langle q'|q\rangle c_1(q) dq' dq = 0$$

per arbitrarie  $c_1(q)$  e  $c_2(q)$ , si ha che  $\langle q'|q\rangle = 0$  per  $q' \neq q$ . Se ammettiamo che  $\langle q'|q\rangle$  sia una funzione arriviamo al paradosso che la norma di ogni vettore (4) è nulla, dato che l'integrando è diverso da zero solo sull'insieme di misura nulla  $q' = q$ . Ciò mostra la necessità in questo formalismo di ampliare lo spazio di Hilbert.

La via d'uscita è ammettere che  $\langle q'|q\rangle$  sia una distribuzione, in particolare

$$\langle q'|q\rangle = k(q)\delta(q' - q)$$

La funzione  $k(q)$  deve essere positiva altrimenti si viola la positività della norma nello spazio di Hilbert. Si possono quindi normalizzare i vettori  $|q\rangle$  dividendoli per  $\sqrt{k(q)}$  ottenendo la normalizzazione standard

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q) \tag{5}$$

Usando la normalizzazione standard si ha per la probabilità di trovare un valore dello spettro nell'intervallo  $I$

$$P_I = \langle \varphi_I | \varphi_I \rangle = \int_I c^*(q)c(q) dq$$

da cui discende che la densità di probabilità è data da

$$P(q) = c^*(q)c(q)$$

Sfruttando la (5) si ha

$$c(q) = \langle q | \varphi \rangle$$

e quindi

$$|\varphi\rangle = \int |q\rangle \langle q | \varphi \rangle dq$$

da cui discende la relazione di completezza

$$\int |q\rangle \langle q| dq = \mathbf{1}$$

In maniera completamente analoga a quanto fatto nel caso di spettro discreto si può associare alla osservabile  $Q$  l'operatore  $\hat{Q}$  dato da

$$\hat{Q} = \int q |q\rangle \langle q| dq$$

Si ha

$$\langle \varphi | \hat{Q} | \varphi \rangle = \int q P(q) dq = \bar{q}$$

Per un qualunque polinomio  $\mathcal{P}$  si ha

$$\mathcal{P}(\hat{Q}) = \int \mathcal{P}(q) |q\rangle \langle q| dq$$

che viene estesa a qualunque funzione  $f$  definita sullo spettro di  $Q$  da

$$f(\hat{Q}) = \int f(q) |q\rangle \langle q| dq$$