Realizzazione di momenti angolari semiinteri : Caso dello spin 1/2

Si tratta di trovare uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ su cui sono definiti tre operatori s_i, $i = 1, 2, 3$ che soddisfano alle regole di commutazione del momento angolare i.e.

$$s_j s_k - s_k s_j = i \sum_l \epsilon_{jkl} \; s_l \tag{29}$$

e tali che risulti pure $\sum_j s_j^2 = 1/2(1/2+1)$. Conviene porre $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ da cui

$$\sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j = 2 \; i \sum_l \epsilon_{jkl} \; \sigma_l \tag{30}$$

Siano χ_+ e χ_- gli autovettori di σ_3

$$\sigma_3 \chi_+ = \chi_+; \quad \sigma_3 \chi_- = -\chi_-$$

Chiaramente si ha $(\chi_-, \chi_+) = 0$ e $(\sigma_1 + i\sigma_2)\chi_+ \equiv \sigma_+ \chi_+ = 0$ e definiamo la fase di χ_- mediante

$$(\sigma_1 - i\sigma_2)\chi_+ \equiv \sigma_- \chi_+ = 2\chi_-$$

Da questo scende

$$(\chi_+, \sigma_3 \chi_+) = 1; \quad (\chi_+, \sigma_3 \chi_-) = 0;$$

$$(\chi_-, \sigma_3 \chi_+) = 0; \quad (\chi_-, \sigma_3 \chi_-) = -1;$$

mentre gli elementi di matrice di σ_+ e σ_- sono tutti zero eccetto

$$(\chi_-, \sigma_- \chi_+) = 2; \quad (\chi_+, \sigma_+ \chi_-) = 2.$$

Abbiamo quindi la seguente rappresentazione bidimensionale

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

chiamate le matrici di Pauli. Si noti che $\sigma_j^2 = 1$ che dice semplicemente che ogni σ_k ha autovalori ± 1.

Dalle regole di commutazione delle σ_j e dalla $\sigma_j^2 = 1$ discende pure il fatto che le σ_j obbediscono alla algebra di Clifford

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\ \delta_{jk} \tag{33}$$

dove $\{,\}$ denota l'anticommutatore. Questo lo si trova e.g. sommando alla (30) moltiplicata a destra per σ_k, la stessa moltiplicata a sinistra per σ_k $(k \neq j)$.

Secondo la formula (22) la rotazione infinitesima attorno ad un asse $\mathbf{n}$ di un angolo ϵ è data da

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = (1 - i\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}\ \epsilon/\hbar) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1 - i\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\ \epsilon/2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{34}$$

e quella finita da

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \exp(-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\ \phi/2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\cos(\phi/2) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\ \sin(\phi/2)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{35}$$

dato che $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 = 1$. Si vede che per una rotazione di 2π attorno ad un qualunque asse si ha $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; questo non contrasta con l'interpretazione fisica del vettore di stato.

Le matrici 2×2

$$U = \cos(\phi/2) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\ \sin(\phi/2) \tag{36}$$

sono tutti e soli gli elementi del gruppo $SU(2)$ cioè il gruppo delle trasformazioni unitarie a determinante 1 in due dimensioni.

Infatti introducendo per comodità la matrice identità in due dimensioni σ_0 si ha che scritta la più generale matrice bidimensionale nella forma $a\sigma_0 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ il determinante di questa è dato da $a^2 - \mathbf{b}^2$. L'inverso della matrice unimodulare sopra scritta è data da $a\sigma_0 - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ come si verifica immediatamente dalla algebra di Clifford.

Se imponiamo ora la unitarietà cioè che l'inversa coincida con la aggiunta si ha che $a = a^*$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{b}^*$. Quindi la più generale matrice di $SU(2)$ si scrive nella forma

$$a\sigma_0 + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{37}$$

con a e $\mathbf{b}$ reali e $a^2 + \mathbf{b}^2 = 1$ cioè è in corripondenza biunivoca e continua con i punti della superficie di una sfera quadridimensionale di raggio 1 , che è un insieme semplicemente connesso. Nella parametrizzazione di formula (36) l'angolo può essere scelto $0 \leq \phi < 2\pi$.

Affinché questa corrispondenza che abbiamo trovato tra gli elementi di $SO(3)$ e di $SU(2)$ sia una rappresentazione proiettiva del gruppo $SO(3)$ è necessario dimostrare che dati due elementi di $SO(3)$, γ_1 e γ_2, i relativi elementi di $SU(2)$, $U(\gamma_1)$ e $U(\gamma_2)$ devono essere tali che

$$U(\gamma_2\gamma_1) = \alpha(\gamma_2, \gamma_1)U(\gamma_2)U(\gamma_1) \tag{38}$$

con $\alpha(\gamma_2, \gamma_1)$ fattore di fase. Dato un elemento di $SO(3)$, cioè la rotazione attorno ad una asse $\mathbf{n}$ di un angolo ϕ ad esso secondo la formula (36) facciamo corrispondere l'elemento di $SU(2)$ che abbiamo gia visto essere determinato a meno di un segno. Dimostriamo ora che

$$U^{+}(\gamma)\boldsymbol{\sigma}U(\gamma) = \gamma(\boldsymbol{\sigma}) \tag{39}$$

Se per esempio eseguiamo una rotazione di un angolo ϕ attorno all'asse z si ha

$$(\cos(\phi/2) + i\sigma_z \ \sin(\phi/2))\sigma_1(\cos(\phi/2) - i\sigma_z \ \sin(\phi/2)) = \cos(\phi)\sigma_1 - \sin(\phi)\sigma_2$$

$$(\cos(\phi/2) + i\sigma_z \ \sin(\phi/2))\sigma_2(\cos(\phi/2) - i\sigma_z \ \sin(\phi/2)) = \sin(\phi)\sigma_1 + \cos(\phi)\sigma_2$$

$$(\cos(\phi/2) + i\sigma_z \ \sin(\phi/2))\sigma_3(\cos(\phi/2) - i\sigma_z \ \sin(\phi/2)) = \sigma_3 \tag{40}$$

cioè abbiamo trovato che

$$(\cos(\phi/2) + i\sigma_z \ \sin(\phi/2))\boldsymbol{\sigma}(\cos(\phi/2) - i\sigma_z \ \sin(\phi/2)) = \gamma(\boldsymbol{\sigma}) \tag{41}$$

Non è difficile dimostrare che la (39) vale per la rotazione di un angolo ϕ attorno ad un qualunque asse $\mathbf{n}$.

Infatti sotto una rotazione attorno a $\mathbf{n}$ di un angolo ϕ si ha che

$$\mathbf{q} \to \mathbf{q}' = \gamma(\mathbf{q}) =$$

$$= \mathbf{n}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}) + \cos(\phi)(\mathbf{q} - \mathbf{n}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})) + \sin(\phi)\mathbf{n}\wedge\mathbf{q} \tag{42}$$

Usando la relazione $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\ \sigma_k\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = -\sigma_k + 2\ n_k\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ che si ricava facilmente dalla algebra di Clifford si trova che

$$(\cos(\phi/2) + i\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\ \sin(\phi/2))\boldsymbol{\sigma}(\cos(\phi/2) - i\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\ \sin(\phi/2)) = \gamma(\boldsymbol{\sigma}) \tag{43}$$

Dati quindi due elementi di $SO(3)$ γ_1 e γ_2 e considerato il loro prodotto $\gamma_2\gamma_1$ si ha

$$U^+(\gamma_1)U^+(\gamma_2)\boldsymbol{\sigma}U(\gamma_2)U(\gamma_1) = U^+(\gamma_1)\gamma_2(\boldsymbol{\sigma})U(\gamma_1) =$$

$$= \gamma_2\gamma_1(\boldsymbol{\sigma}) = U^+(\gamma_2\gamma_1)\boldsymbol{\sigma}U(\gamma_2\gamma_1) \tag{44}$$

Abbiamo quindi dire che l'operatore unitario $V = U(\gamma_2\gamma_1)U^+(\gamma_1)U^+(\gamma_2)$ è tale che

$$V^+\boldsymbol{\sigma}V = \boldsymbol{\sigma} \tag{45}$$

oppure

$$\boldsymbol{\sigma}V = V\boldsymbol{\sigma} \tag{46}$$

Essendo V un elemento di $SU(2)$ si verifica facilmente che ciò impone $V = 1$ oppure $V = -1$. Possiamo quindi affermare che la (36) dà una rappresentazione proiettiva di $SO(3)$ cioè vale la (38) col fattore di fase α che può prendere solo i valori ± 1. Questo ci dice pure che se abbiamo una successione di trasformazioni di $SO(3)$ il cui prodotto uguaglia la identità, sotto il prodotto delle rispettive trasformazioni di $SU(2)$ lo spinore o va in se stesso o cambia segno.

Viceversa dato un elemento U di $SU(2)$ possiamo scrivere

$$U^+\sigma_j U = \sum_{l=1}^{3}\Gamma_{jl}\ \sigma_l \tag{47}$$

dato che la traccia del primo membro è zero. Poiché il primo membro è un operatore hermitiano si ha che gli elementi Γ_{jl} sono reali. Facendo il prodotto di due di queste relazioni e prendendo la traccia si ha

$$\delta_{jm} = \sum_{l=1}^{3}\Gamma_{jl}\Gamma_{ml} \tag{48}$$

da cui concludiamo che le Γ_{jl} sono elementi del gruppo ortogonale reale. Inoltre se si prende la traccia di $U^+\sigma_1 U U^+\sigma_2 U U^+\sigma_3 U$ si ha

$$2i = 2i \sum_{jkl} \epsilon_{jkl} \Gamma_{1j} \Gamma_{2k} \Gamma_{3l} \tag{49}$$

cioè $\det \Gamma = 1$. U e $-U$ attraverso la (47) generano la stessa Γ. Viceversa se U e V generano lo stesso Γ a causa del ragionamento fatto (cfr. eq.(45,46)) si ha $U = \pm V$. Quindi ad ogni elemento di $SU(2)$ corrisponde un elemento di $SO(3)$ mentre ad ogni elemento di $SO(3)$ corrispondono due elementi di $SU(2)$ dati da $\pm U$. $SU(2)$ è un gruppo semplicemente connesso e viene chiamato il ricoprimento universale di $SO(3)$. Lo si vede dal fatto che esso è topologicamente equivalente alla superficie della sfera quadridimensionale e questa è topologicamente equivalente a due palle tridimensionali di raggio 1 e che hanno la superficie esterna in comune. Invece $SO(3)$ è topologicamente equivalente ad una palla di raggio π con i punti della superficie di tale palla, diametralmente opposti, identificati. Questo perché ogni elemento di $SO(3)$ è la rotazione attorno ad un asse e la rotazione di π attorno ad un asse è la stessa trasformazione che si ottiene ruotando di π attorno all'asse opposto. $SO(3)$ non è semplicemente connesso.