

Università di Pisa
Corso di Laurea in Fisica



Complementi di Fisica II

Giovanni Moruzzi

Anno accademico 2016/2017

versione del 3 novembre 2017

Capitolo 1

Elettrostatica

1.1 Angolo solido

Dati, nello spazio tridimensionale, una linea chiusa C e un punto O non appartenente alla linea stessa, si definisce angolo solido la parte dello spazio delimitata dalla superficie laterale formata dalle semirette che hanno origine in O e passano per tutti i punti di C , come schematizzato in Fig. 1.1. Un angolo solido è così un *cono infinito generalizzato*. La misura dell'angolo solido è analoga alla misura dell'angolo piano in radianti. Quest'ultima è ottenuta disegnando una circonferenza di raggio r centrata sul vertice dell'angolo, e dividendo per r la lunghezza dell'arco tagliato dall'angolo. Nel caso dell'angolo solido, si disegna una sfera di raggio r centrata sul vertice dell'angolo solido stesso. L'angolo solido taglia una certa superficie di estensione S sulla superficie della sfera, come mostrato in Fig. 1.1. La misura dell'angolo solido, in *steradiani*, si ottiene dividendo S per r^2 :

$$\Omega = \frac{S}{r^2}. \quad (1.1)$$

Essendo un rapporto tra due superfici, il valore in steradiani corrisponde, in realtà, ad un numero puro, ed è indipendente dalle unità di misura usate per r e per S .

Data una superficie piana di estensione S possiamo definire il *vettore superficie* ad essa associato \vec{S} come il vettore che ha modulo pari a S (e quindi è misurato in m^2), e direzione perpendicolare alla superficie stessa. Il verso, per il momento, è arbitrario. Consideriamo adesso un elemento infinitesimo di superficie dS , quindi sufficientemente piccolo da poter essere considerato piano. Ad esso sarà associato un vettore $d\vec{S}$. Consideriamo anche un punto O esterno a dS , dal quale dS è visto sotto un angolo solido infinitesimo $d\Omega$, come in Fig. 1.3. Chiamiamo r la distanza tra O e dS , e \hat{r} il suo versore.

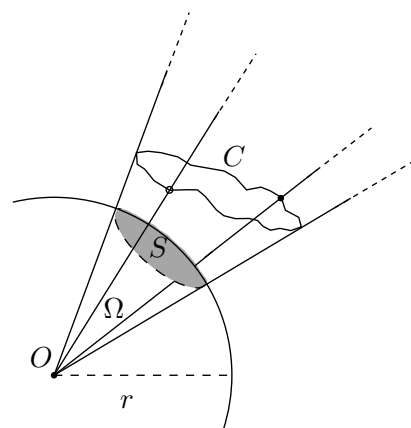


Figura 1.1 Angolo solido

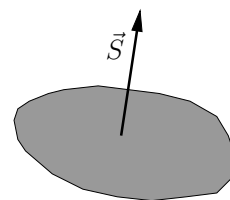


Figura 1.2 Vettore superficie

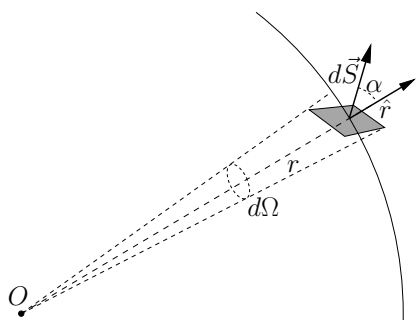


Figura 1.3 Superficie infinitesima e angolo solido

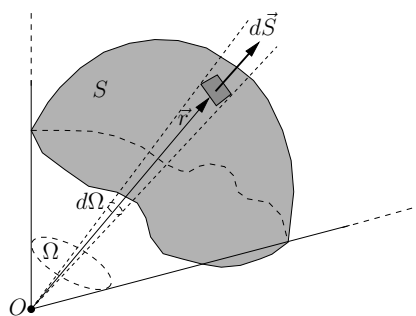


Figura 1.4 Angolo solido sotto cui viene vista una superficie generica

Il prodotto scalare $\hat{r} \cdot d\vec{S}$ è uguale, al primo ordine, alla proiezione di dS sulla superficie della sfera di raggio r centrata in O : infatti un elemento di superficie sferica di dimensioni infinitesime può essere confuso con un elemento di superficie piana. Quindi abbiamo per il valore di $d\Omega$

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}. \quad (1.2)$$

Passiamo adesso all'angolo solido sotto cui viene vista una superficie generica S da un punto O fuori da essa, come in Fig. 1.4. Cominciamo dividendo S in tanti elementi sufficientemente piccoli da poter essere considerati piani identificabili ognuno da un vettore posizione \vec{r} con versore \hat{r} . Ad ognuno di questi elementi di superficie sarà associato un vettore $d\vec{S}$, e l'elemento sarà visto da O sotto un angolo solido infinitesimo dato dalla (1.2). L'angolo solido sotto cui viene vista l'intera superficie S sarà così

$$\Omega = \int_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}. \quad (1.3)$$

1.2 Teorema di Gauss

Vogliamo calcolare il flusso del campo elettrico \vec{E} generato da una carica puntiforme q attraverso una generica superficie chiusa *convessa* S che la contiene, come in Fig. 1.5. Su di un punto qualunque della superficie, distante r da q , il campo elettrico vale

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad (1.4)$$

dove \hat{r} è il versore di r . Il flusso è dato quindi da

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}. \quad (1.5)$$

Si noti che, avendo a che fare con una superficie chiusa, esiste un criterio per distinguere i due possibili versi dell'elemento $d\vec{S}$: verso entrante e verso uscente. Per convenzione, si considera $d\vec{S}$ diretto secondo il verso uscente. Per la (1.2) abbiamo

$$\frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = d\Omega, \quad (1.6)$$

dove $d\Omega$ è l'angolo solido sotto cui la carica puntiforme vede la superficie dS . Il contributo $d\Phi$ che dS porta al flusso totale Φ vale quindi

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \quad (1.7)$$

ed è proporzionale all'angolo solido sotto cui dS viene visto dalla carica. Il flusso totale attraverso la superficie chiusa è

$$\Phi = \oint d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.8)$$

perché l'angolo solido totale vale 4π . Se all'interno della superficie chiusa ci sono più cariche, avremo per il campo elettrico in un generico punto P della superficie

$$\vec{E}(P) = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_{iP}^2} \hat{r}_{iP}, \quad (1.9)$$

dove q_i è il valore della i -esima carica interna, r_{iP} è la distanza della i -esima carica dal punto in cui si calcola il campo elettrico, e \hat{r}_{iP} il suo versore. Avremo quindi per il flusso totale attraverso la superficie

$$\Phi = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (1.10)$$

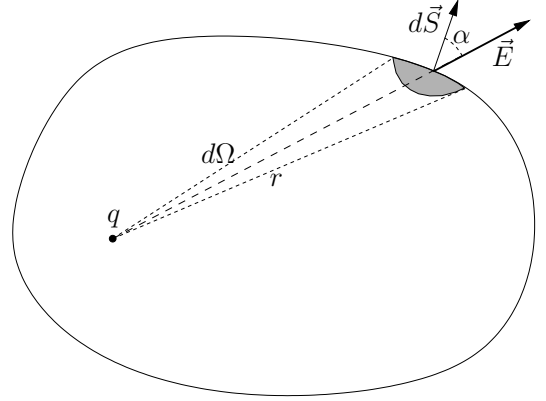


Figura 1.5 Superficie chiusa che contiene una carica

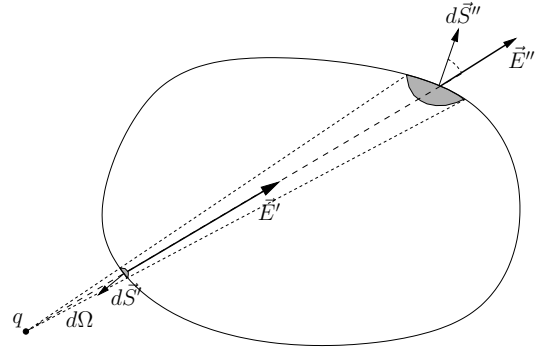


Figura 1.6 Superficie chiusa con carica esterna

Consideriamo adesso una superficie chiusa ed una carica puntiforme q fuori da essa, come in Fig. 1.6. Lo stesso angolo solido infinitesimo $d\Omega$, con vertice in q , o non attraversa la superficie, o la attraversa due volte, delimitando due elementi di superficie dS' e dS'' . Il flusso attraverso dS' e dS'' è uguale in modulo per la (1.7), ma ha segno opposto perché è una volta entrante ed una volta uscente. Possiamo scegliere un insieme di angoli solidi infinitesimi con vertice in q che copra tutta la superficie chiusa. Ognuno di questi angoli solidi infinitesimi attraversa la superficie due volte, una volta entrando ed una uscendo, dando così un contributo nullo al flusso totale, che sarà, di conseguenza, nullo.

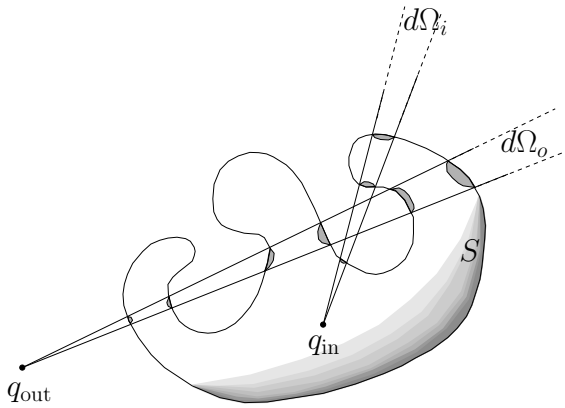


Figura 1.7 Superficie chiusa concava

Consideriamo adesso una superficie chiusa, ma questa volta *concava*, come in Fig. 1.7. Un angolo solido infinitesimo con vertice su una carica esterna q_{out} attraversa la superficie un numero pari di volte, uscendo tante volte quante entra. Taglierà quindi un numero pari di elementi di superficie, su ognuno dei quali il flusso di \vec{E} ha lo stesso valore in modulo, ma segno alternativamente negativo e positivo. Il flusso totale del campo elettrico generato da q_{out} sarà quindi nullo. Al contrario, un angolo solido infinitesimo con vertice su una carica interna q_{in} attraversa la superficie un numero dispari di volte, uscendo una volta in più di quelle che rientra. Il contributo complessivo di $d\Omega$ al flusso attraverso la superficie sarà quindi pari alla (1.7), ed il flusso totale sarà $\Phi = q_{\text{in}}/\epsilon_0$. Tutto questo paragrafo può essere condensato nell'espressione

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

dove Q_{in} è la somma di tutte e sole le cariche interne alla superficie chiusa.

1.3 Delta di Dirac

La delta di Dirac, denotata con $\delta(x)$, è una “funzione generalizzata” (o *distribuzione*). Dirac stesso aveva usato il termine “funzione impropria”. Il suo argomento x è reale, con $-\infty < x < \infty$, e la $\delta(x)$ è definita dalle proprietà seguenti, dove la (1.14) è in realtà una conseguenza della (1.12),

$$\delta(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0; \quad (1.12)$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad \text{per} \quad a < 0 < b; \quad (1.13)$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = 0 \quad \text{per} \quad a < b < 0 \quad \text{o} \quad 0 < a < b. \quad (1.14)$$

Quindi la $\delta(x)$ non associa un valore reale finito ad ogni valore del suo argomento, perché le condizioni (1.12) e (1.13) implicano che la $\delta(x)$ diverga all'origine. Mentre non esiste nessuna funzione ordinaria con tale comportamento, la $\delta(x)$ può essere considerata come limite di alcune funzioni ordinarie, per esempio come limite della gaussiana

$$\frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-x^2/c^2} \quad (1.15)$$

per il parametro c che tende a zero. Al limite $c \rightarrow 0$, infatti, tende a zero la semilarghezza a metà altezza della curva $\Delta x = c \sqrt{\log 2}$, tende all'infinito la sua altezza $1/(\sqrt{\pi c})$, mentre la superficie al di sotto della curva stessa rimane costante e uguale a 1. La figura 1.8 mostra la funzione (1.15) per quattro valori diversi del parametro c . Sono così verificate le condizioni

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-x^2/c^2} = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (1.16)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-x^2/c^2} dx = 1, \quad \text{indipendentemente dal valore di } c. \quad (1.17)$$

Scelti due valori reali arbitrari $a < 0$ e $b > 0$ si ha

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-x^2/c^2} dx = 1, \quad (1.18)$$

mentre per due valori reali a e b sempre arbitrari, ma dello stesso segno, abbiamo

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-x^2/c^2} dx = 0. \quad (1.19)$$

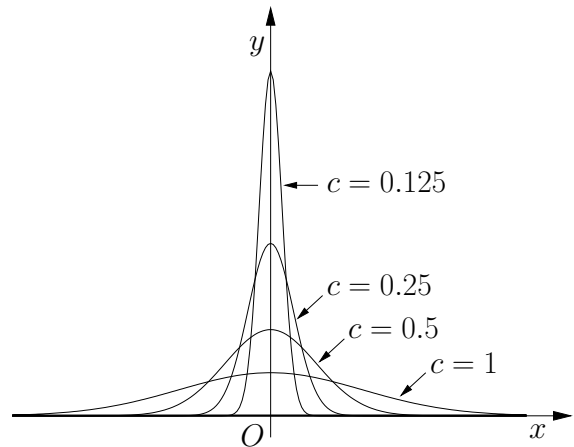


Figura 1.8 Grafici di gaussiane date dalla (1.15) per diversi valori del parametro c . Le aree sottese dalle curve sono uguali tra loro.

Una importante proprietà della $\delta(x)$ è che, se $f(x)$ è una qualunque funzione continua, vale la relazione

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0) & \text{se } a < 0 \text{ e } b > 0; \\ 0 & \text{se } a \text{ e } b \text{ hanno lo stesso segno.} \end{cases} \quad (1.20)$$

Infatti, essendo $f(x)$ continua, una volta scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario possiamo sempre trovare due valori a' e b' , con $a < a' < 0$ e $0 < b' < b$, sufficientemente vicini tra loro perché, per ogni x appartenente all'intervallo (a', b') , si abbia $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Ricordando la (1.18) e che la gaussiana è definita positiva possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \left| f(0) \int_{a'}^{b'} \frac{1}{\sqrt{\pi}c} e^{-x^2/c^2} dx - \int_{a'}^{b'} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}c} e^{-x^2/c^2} dx \right| &= \int_{a'}^{b'} |f(x) - f(0)| \frac{1}{\sqrt{\pi}c} e^{-x^2/c^2} dx \\ &< \varepsilon \int_{a'}^{b'} \frac{1}{\sqrt{\pi}c} e^{-x^2/c^2} dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ricordando anche la (1.19) abbiamo finalmente

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}c} e^{-x^2/c^2} dx = f(0). \quad (1.21)$$

Da questa proprietà segue, spostando l'origine dell'asse x , che

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad \text{per ogni coppia } a < x_0, b > x_0. \quad (1.22)$$

In uno spazio a tre dimensioni possiamo definire la delta tridimensionale $\delta(\vec{r})$, con \vec{r} vettore posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, come $\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$. Valgono le proprietà

$$\delta(\vec{r}) = 0 \quad \text{se } \vec{r} \neq 0; \quad (1.23)$$

$$\int_{\tau} \delta(\vec{r}) d^3x = 1 \quad \text{se il volume } \tau \text{ contiene l'origine}; \quad (1.24)$$

$$\int_{\tau} \delta(\vec{r}) d^3x = 0 \quad \text{se il volume } \tau \text{ non contiene l'origine}. \quad (1.25)$$

Sopra abbiamo posto $d^3x = dx dy dz$. Se $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ è una qualunque funzione continua delle coordinate, scelto un punto $\vec{r}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, valgono le proprietà

$$\int_{\tau} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3x = f(\vec{r}_0) \quad \text{se il volume } \tau \text{ contiene il punto } \vec{r}_0; \quad (1.26)$$

$$\int_{\tau} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3x = 0 \quad \text{se il volume } \tau \text{ non contiene il punto } \vec{r}_0, \quad (1.27)$$

dove abbiamo definito $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$.

Studiando l'elettromagnetismo incontreremo la delta di Dirac molto spesso. Qui ci limitiamo a ricordare il suo uso per scrivere la densità volumica di carica $\rho(\vec{r})$ in presenza di cariche

puntiformi. Sappiamo che, nel caso di $\rho(\vec{r})$ finita (carica “spalmata” sul volume), preso un qualunque volume τ la carica in esso contenuta è data da

$$Q(\tau) = \int_{\tau} \rho(\vec{r}) d^3x. \quad (1.28)$$

Consideriamo invece il caso in cui abbiamo solo una carica puntiforme q localizzata in \vec{r}_0 . Chiaramente non possiamo usare direttamente una definizione del tipo

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{Q(\tau)}{\tau} \quad (1.29)$$

con τ volumetto che contiene il punto \vec{r} , perché ci darebbe problemi per $\vec{r} = \vec{r}_0$. Ma se poniamo

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (1.30)$$

vediamo che questa espressione inserita nella (1.28) ci dà correttamente la carica contenuta in qualunque volume τ . Infatti

$$Q(\tau) = \int_{\tau} \rho(\vec{r}) d^3x = q \int_{\tau} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3x = \begin{cases} q & \text{se } \tau \text{ contiene } \vec{r}_0 \\ 0 & \text{se } \tau \text{ non contiene } \vec{r}_0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Nel caso di più cariche puntiformi q_i , ognuna con una sua localizzazione \vec{r}_i , con $1 \leq i \leq n$, la densità volumica di carica si scrive

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (1.32)$$

1.4 Sviluppo in multipoli del potenziale elettrico

1.4.1 Introduzione

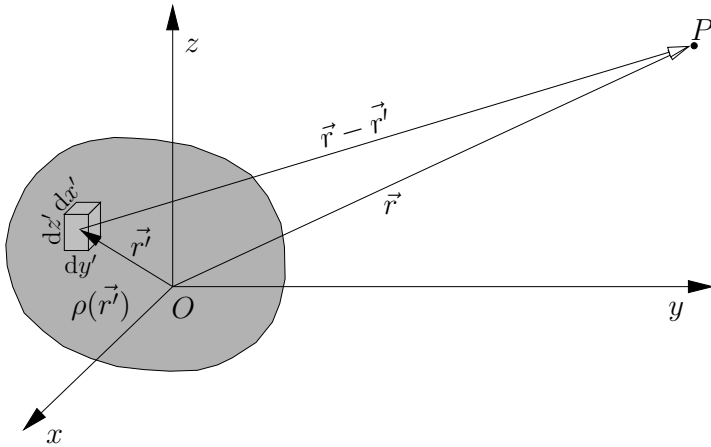


Figura 1.9 Distribuzione di carica elettrica limitata nello spazio.

Consideriamo una distribuzione spaziale di carica elettrica contenuta all'interno di un certo volume finito, rappresentato dalla parte ombreggiata nella Fig. 1.9. La distribuzione di carica è del tutto arbitraria, a parte la condizione di essere ovunque nulla al di fuori del nostro volume. Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane xyz con l'origine O all'interno del volume carico, sempre come in figura. Ogni punto dello spazio è così identificato da un vettore posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$. Sia $\rho(x, y, z) = \rho(\vec{r})$ la densità volumica di carica elettrica, con $\rho(\vec{r}) = 0$ se il vettore posizione \vec{r} corrisponde ad un punto fuori dal nostro volume. Per calcolare il potenziale generato dalla distribuzione di carica in un punto qualunque P dello spazio, identificato dal suo vettore posizione $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, cominciamo dividendo il volume carico in tanti parallelepipedi rettangoli infinitesimi. Il singolo parallelepipedino avrà posizione \vec{r}' e volume $d^3x' \equiv dx'dy'dz'$. La sua carica sarà $dq' = \rho(\vec{r}') d^3x'$, ed il suo contributo al potenziale in P , $V(\vec{r})$, sarà

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') d^3x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.33)$$

dove $|\vec{r} - \vec{r}'|$ è il modulo della distanza tra il parallelepipedino considerato e il punto P . Per avere il valore complessivo di $V(\vec{r})$ dobbiamo integrare su tutto il volume carico, ottenendo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.34)$$

Fin qui non abbiamo fatto approssimazioni. Adesso supponiamo che ci interessi calcolare il potenziale in un punto P sufficientemente lontano dal volume carico perché sia $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ per ogni \vec{r}' per cui $\rho(\vec{r}') \neq 0$. In altre parole, supponiamo di calcolare il potenziale ad una distanza molto grande rispetto alle dimensioni lineari del volume carico. Riscriviamo la (1.34) nella forma

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int f(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3x', \quad \text{dove} \quad f(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.35)$$

e, data la condizione $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$, sviluppiamo $f(\vec{r}, \vec{r}')$ in serie di Taylor attorno a $\vec{r}' = 0$:

$$f(\vec{r}, \vec{r}') = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + \dots \quad (1.36)$$

con

$$\begin{aligned}
 f^{(0)} &= \frac{1}{r}, & f^{(1)} &= \sum_i \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_i} \Big|_{\vec{r}'=0} x'_i, & f^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_i \partial x'_j} \Big|_{\vec{r}'=0} x'_i x'_j, \\
 f^{(3)} &= \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 f(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_i \partial x'_j \partial x'_k} \Big|_{\vec{r}'=0} x'_i x'_j x'_k, & \dots & & &
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Per “stenografia” nelle sommatorie abbiamo usato la solita convenzione di indicare x' con x'_1 , y' con x'_2 , z' con x'_3 . La (1.34) viene così sviluppata nella forma

$$V(\vec{r}) = V^{(0)}(\vec{r}) + V^{(1)}(\vec{r}) + V^{(2)}(\vec{r}) + V^{(3)}(\vec{r}) + \dots, \quad \text{con} \quad V^{(n)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int f^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3x'. \tag{1.38}$$

Questo sviluppo è importante perché, in molti casi di interesse, il potenziale si ottiene con precisione sufficiente troncando l'espressione e tenendo solo pochi termini iniziali. Nei paragrafi che seguono consideriamo separatamente gli addendi della (1.38).

1.4.2 Termine di monopolio

Se consideriamo l'addendo di ordine 0 della (1.38) abbiamo

$$V^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int f^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \tag{1.39}$$

dove $Q = \int \rho(\vec{r}') d^3x'$ è la carica complessiva, o *momento di monopolio*, della nostra distribuzione di carica. Il contributo al potenziale nel punto \vec{r} dato dalla (1.39) si chiama *termine di monopolio*, ed è lo stesso potenziale che avremmo se tutta la carica fosse concentrata in un unico punto all'origine delle coordinate.

1.4.3 Termine di dipolo

L'addendo di ordine 1 della (1.38) ha la forma

$$V^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int f^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3x', \tag{1.40}$$

dove $f^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ è data dalla seconda delle (1.37). Ricordando che

$$f(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} = \left[\sum_{k=1}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-1/2}, \tag{1.41}$$

con la notazione descritta sotto alla (1.37) abbiamo per le derivate prime di f

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \left[\sum_{k=1}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-3/2} (x_i - x'_i), \tag{1.42}$$

che, calcolate in $\vec{r}' = 0$ valgono $\left. \frac{\partial f}{\partial x'_i} \right|_{\vec{r}'=0} = \frac{x_i}{r^3}$. Il primo ordine dello sviluppo di f si scrive così

$$f^{(1)} = \sum_i \left. \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_i} \right|_{\vec{r}'=0} x'_i = \sum_i \frac{x_i x'_i}{r^3} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}. \quad (1.43)$$

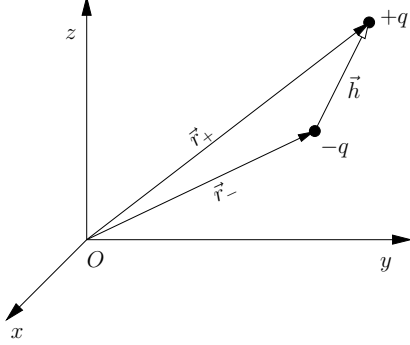
Sostituendo nella (1.40) otteniamo

$$V^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \rho(\vec{r}') d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (1.44)$$

dove

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3x' \quad (1.45)$$

è il *momento di dipolo* della nostra distribuzione di carica. Il contributo $V^{(1)}$ al potenziale totale si chiama *termine di dipolo*, ed è lo stesso potenziale che avremmo se nell'origine delle coordinate ci fosse il dipolo \vec{p} dato dalla (1.45).



Se la nostra distribuzione di carica è costituita da N cariche puntiformi q_s , ognuna con vettore posizione $\vec{r}_s \equiv (x_s, y_s, z_s)$, la densità di carica ρ può essere scritta

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{s=1}^N q_s \delta(x' - x_s) \delta(y' - y_s) \delta(z' - z_s), \quad (1.46)$$

dove le δ sono δ di Dirac. Introducendo questa espressione nella (1.45) otteniamo

$$\vec{p} = \sum_{s=1}^N \vec{r}_s q_s. \quad (1.47)$$

Figura 1.10 Dipolo costituito da due cariche puntiformi uguali ed opposte.

La figura 1.10 mostra il caso particolare di una carica $-q$ posta in \vec{r}_- ed una carica $+q$ posta in $\vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{h}$. Abbiamo momento di monopolo nullo e momento di dipolo $\vec{p} = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q\vec{h}$.

1.4.4 Termine di quadrupolo

L'addendo di ordine 2 della (1.38) è

$$V^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int f^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3x', \quad (1.48)$$

dove $f^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ è data dalla terza delle (1.37). Partendo dall'espressione per le derivate parziali prime della (1.42) otteniamo per le derivate parziali seconde miste (cioè con $i \neq j$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} = 3 \left[\sum_{k=1}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-5/2} (x_i - x'_i)(x_j - x'_j), \quad (1.49)$$

mentre per le derivate parziali seconde pure ($i = j$) abbiamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x'_i} = 3 \left[\sum_{i=k}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-5/2} (x_i - x'_i)^2 - \left[\sum_{i=k}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-3/2}. \quad (1.50)$$

Queste due espressioni possono essere compattate nella forma, valida per ogni coppia i, j ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} = 3 \left[\sum_{i=k}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-5/2} (x_i - x'_i)(x_j - x'_j) - \delta_{ij} \left[\sum_{i=k}^3 (x_k - x'_k)^2 \right]^{-3/2}, \quad (1.51)$$

dove δ_{ij} è la δ di Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$). Ponendo $\vec{r}' = 0$ abbiamo

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} \right|_{\vec{r}'=0} = 3 \frac{x_i x_j}{r^5} - \delta_{ij} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^5} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2). \quad (1.52)$$

Introducendo questa espressione nella (1.37) abbiamo per il termine al secondo ordine di f

$$f^{(2)} = \frac{1}{2 r^5} \sum_{ij} (3x_i x_j x'_i x'_j - \delta_{ij} r^2 x'_i x'_j) = \frac{1}{6 r^5} \sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j - \delta_{ij} 3 r^2 x'_i x'_j). \quad (1.53)$$

Gli addendi della (1.53) possono essere fattorizzati ognuno nel prodotto di due termini, uno dipendente solo dalla posizione \vec{r} del punto in cui si calcola il potenziale, e l'altro solo dalla posizione \vec{r}' del volumetto carico, nel modo seguente

$$f^{(2)} = \frac{1}{6 r^5} \sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j - \delta_{ij} 3 r^2 x'_i x'_j) = \frac{1}{6 r^5} \sum_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)(3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2). \quad (1.54)$$

La validità dell'uguaglianza della (1.54) si dimostra calcolando separatamente le due somme. Per la prima abbiamo

$$\sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j - \delta_{ij} 3 r^2 x'_i x'_j) = \sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j) - 3 r^2 r'^2, \quad (1.55)$$

mentre abbiamo per la seconda

$$\begin{aligned} \sum_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)(3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) &= \sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j - \delta_{ij} 3x_i x_j r'^2 - \delta_{ij} 3x'_i x'_j r^2 + \delta_{ij} r^2 r'^2) \\ &= \sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j) - 3 r^2 r'^2 - 3 r^2 r'^2 + 3 r^2 r'^2 \\ &= \sum_{ij} (9x_i x_j x'_i x'_j) - 3 r^2 r'^2, \end{aligned} \quad (1.56)$$

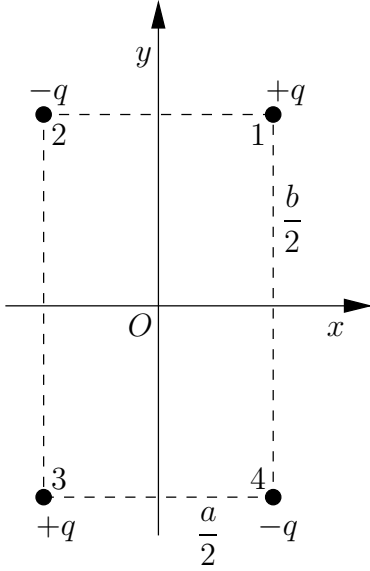
che dimostra quanto volevamo. Sostituendo la (1.54) nella (1.48) otteniamo

$$\begin{aligned} V^{(2)}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^5} \sum_{ij} \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)(3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') d^3 x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^5} \sum_{ij} Q_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2), \end{aligned} \quad (1.57)$$

dove le Q_{ij} sono le componenti di un tensore del secondo ordine detto *momento di quadrupolo*, e il contributo $V^{(2)}$ al potenziale totale si chiama *termine di quadrupolo*. Le singole componenti del tensore di quadrupolo valgono

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') d^3 x'. \quad (1.58)$$

E' da notare che Q_{ij} è un tensore simmetrico a traccia nulla, cioè $\sum_i Q_{ii} = 0$.



Se la nostra distribuzione di carica è costituita da N cariche puntiformi q_s , ognuna con vettore posizione $\vec{r}_s \equiv (x_{s1}, x_{s2}, x_{s3})$, la densità di carica ρ è data ancora dalla (1.46), e le componenti del quadrupolo si scrivono

$$Q_{ij} = \sum_{s=1}^N q_s (3x_{si} x_{sj} - \delta_{ij} r_s^2). \quad (1.59)$$

Una semplice configurazione di cariche puntiformi con momenti di monopolo e dipolo nulli, e momento di quadrupolo non nullo, è mostrata in Fig. 1.11. Qui abbiamo $z = 0$ per tutte e quattro le cariche, e

$q_1 = +q$	$x_1 = a/2$	$y_1 = b/2$	$r_1^2 = (a^2 + b^2)/4$
$q_2 = -q$	$x_2 = -a/2$	$y_2 = b/2$	$r_2^2 = (a^2 + b^2)/4$
$q_3 = +q$	$x_3 = -a/2$	$y_3 = -b/2$	$r_3^2 = (a^2 + b^2)/4$
$q_4 = -q$	$x_4 = a/2$	$y_4 = -b/2$	$r_4^2 = (a^2 + b^2)/4$

Figura 1.11 Caso particolare di quadrupolo elettrico con configurazione rettangolare.

Introducendo questi valori nella (1.59) otteniamo per il momento di quadrupolo

$$Q = q \begin{pmatrix} 0 & 3ab & 0 \\ 3ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

La (1.60) ci dice che nel sistema di riferimento che abbiamo scelto il nostro momento di quadrupolo non è diagonale. Ma è possibile diagonalizzarlo mediante una rotazione degli assi coordinati. Per far questo dobbiamo trovare una matrice di rotazione R tale che la matrice $Q' = RQR^{-1}$ sia diagonale. Ricordando la forma della matrice che effettua una rotazione di un angolo α nel piano xy abbiamo

$$\begin{aligned} Q' &= RQR^{-1} = q \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3ab & 0 \\ 3ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= q \begin{pmatrix} 6ab \cos \alpha \sin \alpha & 3ab(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) & 0 \\ 3ab(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) & -6ab \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

La matrice di rotazione R della (1.61) ruota i punti del piano xy di un angolo α in senso orario attorno all'origine. Questo corrisponde ad una rotazione di un angolo α in senso antiorario degli assi coordinati. Notiamo che il tensore Q' è diagonale se $\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, condizione realizzata, per esempio, se $\alpha = \pi/4$. La disposizione delle cariche nel nuovo sistema di coordinate è

mostrata in Fig. 1.12. Per $\alpha = \pi/4$ abbiamo $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$, e la (1.61) ci dà per Q'

$$Q' = \begin{pmatrix} 3ab & 0 & 0 \\ 0 & -3ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Che questo risultato è corretto può essere controllato ricalcolando il momento di quadrupolo dalla Fig. 1.12. La semi-diagonale del rettangolo vale $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, mentre l'angolo ϑ vale $\arctan(a/b)$. Le coordinate della carica 1 valgono così $x_1 = r \cos(\frac{\pi}{4} - \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(a+b)$ e $y_1 = r \sin(\frac{\pi}{4} - \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a)$. Dalla simmetria della Fig. 1.12 otteniamo per le altre tre cariche

$$\begin{aligned} q_2 = -q & & x_2 = y_1 & & y_2 = x_1 & & r_2^2 = (a^2 + b^2)/4 \\ q_3 = +q & & x_3 = -x_1 & & y_3 = -y_1 & & r_3^2 = (a^2 + b^2)/4 \\ q_4 = -q & & x_4 = -y_1 & & y_4 = -x_1 & & r_4^2 = (a^2 + b^2)/4. \end{aligned}$$

Questi valori, inseriti nella (1.59), ci ridanno la (1.62).

Un'altra semplice configurazione di cariche puntiformi, questa volta lineare, con momenti di monopolo e dipolo nulli, e momento di quadrupolo non nullo, è mostrata in Fig. 1.13. Qui abbiamo $y = 0$ e $z = 0$ per tutte le cariche, e

$$\begin{aligned} q_1 = -q & & x_1 = -a & & r_1^2 = a^2 \\ q_2 = 2q & & x_2 = 0 & & r_2^2 = 0 \\ q_3 = -q & & x_3 = a & & r_3^2 = a^2 \end{aligned}$$

Introducendo questi valori nella (1.59) otteniamo per il momento di quadrupolo

$$Q = q \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

1.4.5 Multipoli di ordine superiore

L'addendo di ordine 3 della (1.38), $V^{(3)}(\vec{r})$, corrisponde al termine di ottupolo, il cui momento è rappresentato da un tensore del terzo ordine. Più in generale, l'addendo di ordine n corrisponde al termine di 2^n -polo, rappresentato da un tensore di ordine n . Ma noi ci fermiamo qui.

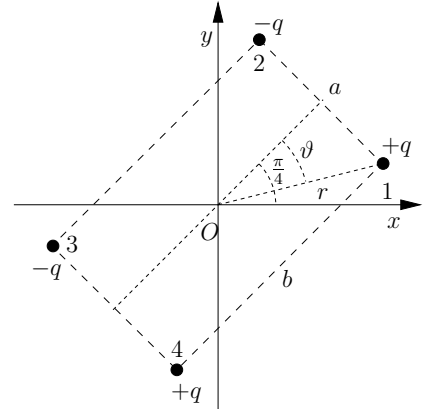


Figura 1.12 La configurazione di cariche della Fig. 1.11 dopo una rotazione antioraria degli assi di un angolo $\alpha = \pi/4$.

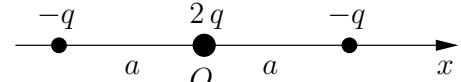
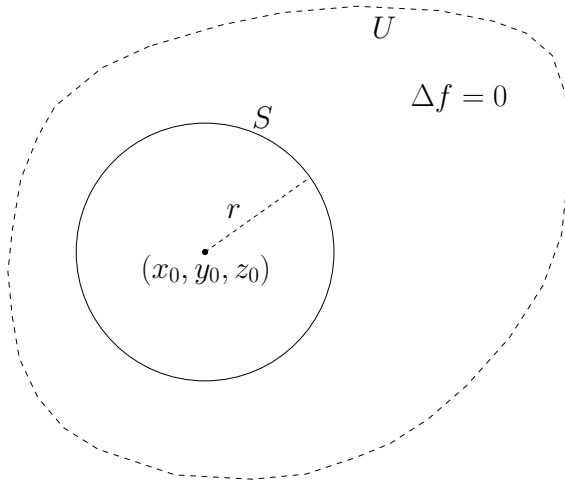


Figura 1.13 Esempio di quadrupolo elettrico lineare.

1.5 Funzioni armoniche: proprietà del valor medio

Una funzione $f(x, y, z)$ si dice armonica su un certo dominio $U \subset \mathbb{R}^3$ se è differenziabile fino al secondo ordine in ogni punto $(x, y, z) \in U$ e se, in ogni punto del dominio, soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (1.64)$$



Una proprietà importante delle funzioni armoniche è che, se consideriamo una sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio r , completamente contenuta in U , il valore di $f(x_0, y_0, z_0)$ è uguale alla media del valore di f sulla superficie S della sfera. Per dimostrarlo, cominciamo calcolando la media \bar{f} di f sulla superficie della sfera, definita da

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f dS. \quad (1.65)$$

Poiché sulla superficie della sfera r è costante, possiamo passarlo da fuori a dentro l'integrale

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi} \int_S f \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_S f d\Omega, \quad (1.66)$$

Figura 1.14 Funzione armonica sul dominio U

dove $d\Omega$ è l'angolo solido sotto cui, dal centro della sfera, viene visto l'elemento di superficie dS . Adesso calcoliamo la derivata di \bar{f} rispetto a r ,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int f d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial f}{\partial r} d\Omega. \quad (1.67)$$

L'ultimo passaggio è legittimo perché l'integrale in $d\Omega$ è indipendente da r . Sempre per l'indipendenza da r dell'integrazione in $d\Omega$ possiamo moltiplicare e dividere per r^2 dentro e fuori dall'integrale, ottenendo

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \int \frac{\partial f}{\partial r} r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \int \frac{\partial f}{\partial r} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_S \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S}, \quad (1.68)$$

perché $\partial f / \partial r$ è la componente radiale del gradiente di f , e quindi è la componente parallela al vettore $d\vec{S}$. Per il teorema della divergenza abbiamo

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_S \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi r^2} \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) d^3x = \frac{1}{4\pi r^2} \int \Delta f d^3x = 0, \quad (1.69)$$

dove l'integrale in d^3x è esteso al volume della sfera, sul quale, essendo all'interno del dominio U , il laplaciano di f è nullo. Quindi il valor medio di f sulla superficie della sfera non dipende

dal raggio della sfera stessa, almeno fin tanto che la sfera rimane all'interno di U . Al limite $r \rightarrow 0$ \bar{f} tende al valore di f al centro della sfera, ovvero $f(x_0, y_0, z_0)$, quindi

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f dS = f(x_0, y_0, z_0) \quad (1.70)$$

indipendentemente dal valore di r , purché sia $\Delta f = 0$ su tutta la sfera. La proprietà del valor medio delle funzioni armoniche può essere usata, per esempio, per calcolare la forza tra due sfere uniformemente cariche.

Consideriamo infatti due sfere, rispettivamente di centri O_1 e O_2 , raggi R_1 e R_2 , e densità volumiche di carica ρ_1 e ρ_2 . Chiamiamo b la distanza tra O_1 e O_2 . Vogliamo calcolare la forza che la sfera 1 esercita sulla sfera 2. Se scegliamo un sistema di coordinate con l'origine in O_1 , per il teorema di Gauss il campo elettrico ed il potenziale generati dalla sfera 1 in un punto di vettore posizione \vec{r}_1 , esterno alla sfera stessa, valgono

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1}, \quad (1.71)$$

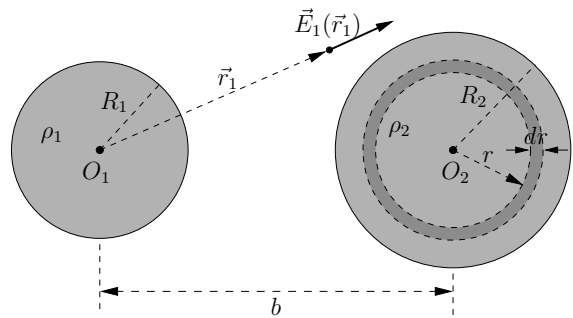


Figura 1.15 Sfere uniformemente cariche

dove $Q_1 = \rho_1 4\pi R_1^3/3$ è la carica totale della sfera 1. Questo ci permette di calcolare subito la forza esercitata dalla sfera 1 su di una carica puntiforme posta in \vec{r}_1 , ma, a priori, il calcolo della forza esercitata sulla sfera 2 è più complesso. Infatti, in linea di principio, dovremmo integrare la forza esercitata su di ogni elemento di volume della sfera 2 stessa. Le cose si semplificano se proviamo a calcolare l'energia potenziale della sfera 2 nel campo della sfera 1, e sfruttiamo la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche. Poiché V_1 è generato dalla carica della sola sfera 1, abbiamo $\Delta V_1 = 0$ su tutto il volume della sfera 2, e quindi qui V_1 è una funzione armonica. Calcoliamo l'energia potenziale, nel campo della sfera 1, di un guscio sferico infinitesimo della sfera 2 compreso tra r e $r + dr$. Avremo

$$dU = \int_{\text{sup. sfera di raggio } r} V_1 \rho dS dr = \rho dr \int V_1 dS. \quad (1.72)$$

l'ultimo integrale può essere calcolato usando la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche, quindi

$$dU = \rho dr \int V_1 dS = \rho dr V_1(O_2) 4\pi r^2 = V_1(O_2) dQ_2 \quad (1.73)$$

dove dQ_2 è la carica contenuta nel guscio sferico tra r e $r + dr$. Integrando su tutta la sfera 2 otteniamo finalmente

$$U = V_1(O_2) Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{b}, \quad (1.74)$$

cioè la stessa energia potenziale che avremmo se tutta la carica della sfera 2 fosse concentrata nel suo centro. Calcolando meno il gradiente dell'energia potenziale otteniamo la forza sulla sfera 2, che è la stessa che avremmo se la carica di ogni sfera fosse concentrata nel suo centro.

1.6 Carica puntiforme di fronte a sfera conduttrice isolata: unicità della soluzione

Consideriamo una carica puntiforme q di fronte ad una sfera conduttrice di raggio R , isolata e di carica Q , eventualmente nulla. Il potenziale elettrico $V(\vec{r})$, in tutto lo spazio al di fuori della sfera, dovrà soddisfare le seguenti condizioni:

1. valere 0 all'infinito: $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0$;
2. essere costante sulla superficie della sfera, con la condizione

$$-\oint \vec{\nabla} V \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad (1.75)$$

3. il suo laplaciano deve valere

$$\Delta V = -q \frac{\delta(x - x_q) \delta(y - y_q) \delta(z - z_q)}{\varepsilon_0} = -q \frac{\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\varepsilon_0}, \quad (1.76)$$

dove $\vec{r}_q \equiv (x_q, y_q, z_q)$ è la posizione della carica.

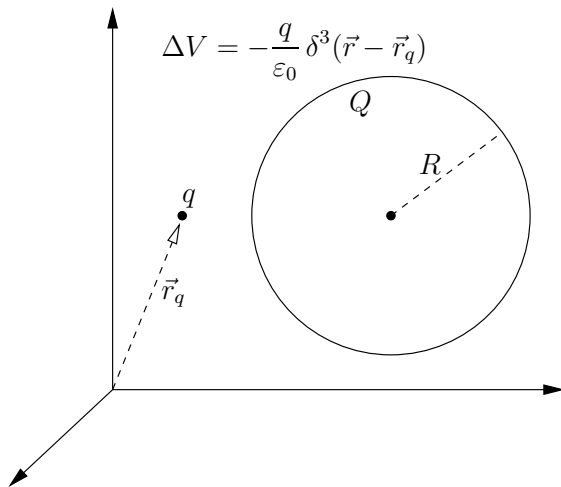


Figura 1.16 Carica puntiforme di fronte a sfera conduttrice isolata

La condizione 2. è quella che distingue questo problema da quello della carica puntiforme di fronte a una sfera conduttrice messa a terra. Infatti, se la sfera è collegata a terra sappiamo il valore di V sulla sua superficie ($V = 0$), ma non ne conosciamo la carica; qui invece conosciamo la carica e sappiamo che V è costante sulla superficie di un conduttore, ma non ne conosciamo il valore. Vogliamo dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione di Poisson anche in questo caso. Facciamo, per assurdo, l'ipotesi che esistano due potenziali diversi, $V_1(\vec{r})$ e $V_2(\vec{r})$, che soddisfino entrambi le condizioni 1 - 3. Introduciamo la funzione $f(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r})$. Questa, sempre nello spazio al di fuori della sfera, deve soddisfare le condizioni

1. $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} f(\vec{r}) = 0$;
2. $f(\vec{r})$ costante sulla superficie della sfera, con la condizione $\oint \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S} = 0$;
3. $\Delta f \equiv 0$.

Consideriamo l'integrale, esteso a tutto lo spazio al di fuori della sfera, della divergenza della funzione $f\vec{\nabla}f$. Per il teorema della divergenza abbiamo

$$\int \vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}f) d^3x = \oint_{\text{sfera}} (f\vec{\nabla}f) \cdot d\vec{S} + \oint_{\text{infinito}} (f\vec{\nabla}f) \cdot d\vec{S}, \quad (1.77)$$

dove gli integrali di superficie a secondo membro coprono il contorno del volume considerato, cioè la superficie della sfera, con $d\vec{S}$ diretto verso l'interno della sfera stessa, e l'infinito. L'integrale sulla superficie all'infinito è nullo perché f vale zero all'infinito. Sulla superficie della sfera, invece, in linea di principio f potrebbe essere diversa da zero, ma è costante, e quindi può essere portata fuori dall'integrale. L'integrale è quindi nullo per la condizione 2 su f , ed è così nullo il secondo membro della (1.77). Usando l'identità, facilmente dimostrabile scrivendo esplicitamente $\vec{\nabla}$ e calcolando le derivate corrispondenti,

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}f + f\Delta f = |\vec{\nabla}f|^2 + f\Delta f, \quad (1.78)$$

otteniamo

$$0 = \int \vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}f) d^3x = \int |\vec{\nabla}f|^2 d^3x + \int f\Delta f d^3x. \quad (1.79)$$

L'ultimo integrale a destra è nullo per la condizione 3 su f , e quindi deve essere

$$\int |\vec{\nabla}f|^2 d^3x = 0. \quad (1.80)$$

Poiché $|\vec{\nabla}f|^2 \geq 0$, l'integrale può essere nullo solo se $\vec{\nabla}f = 0$ dappertutto al di fuori della sfera, cioè se f è costante. Ma poiché f vale 0 all'infinito, f deve essere ovunque nulla. Quindi, $V_1(\vec{r}) \equiv V_2(\vec{r})$, e la soluzione del problema è unica. A parità delle altre condizioni, avremo però potenziali diversi per diversi valori di Q .

Capitolo 2

Magnetostatica

2.1 Potenziale scalare magnetico e teorema di Ampère

Dalla legge di Biot e Savart otteniamo che le linee di forza del campo magnetico \vec{B} generato da un filo rettilineo infinito percorso da una corrente I sono circonferenze che hanno il filo come asse. La circuitazione di \vec{B} lungo qualunque di queste circonferenze è diversa da zero. Quindi, in generale, il rotore di \vec{B} è diverso da zero, il campo \vec{B} non è conservativo e non può essere derivato da un potenziale scalare φ . In questo paragrafo vedremo che è però possibile scrivere una relazione del tipo

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (2.1)$$

valida all'interno di un dominio semplicemente connesso e in cui non circolino correnti elettriche. Notiamo che, se abbiamo un circuito di estensione finita percorso da corrente, possiamo sempre racchiuderlo in un dominio semplicemente connesso di dimensioni lineari finite (per esempio una sfera, un cubo, un cilindro, ...). E ricordiamo che in \mathbb{R}^3 lo spazio al di fuori di un dominio semplicemente connesso è a sua volta un dominio semplicemente connesso.

Consideriamo il circuito di Fig. 2.1 e una sfera S (per esempio la sfera minima) che contenga il circuito stesso, e vediamo se è possibile costruire una funzione scalare il cui gradiente, al di fuori della sfera, sia uguale a meno il campo magnetico. Prendiamo un punto P , di vettore posizione \vec{r} , in questo dominio "esterno". Per la legge di Biot e Savart abbiamo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (2.2)$$

dove \vec{r}' è il vettore di posizione dell'elemento di circuito

$d\vec{l}'$, su cui integriamo. Vogliamo costruire una funzione scalare $\varphi(\vec{r})$ tale che valga la (2.1). Per definizione di gradiente, se ci spostiamo di un tratto $\delta\vec{r}$ da P , cioè passiamo dalla posizione \vec{r} alla posizione $\vec{r} + \delta\vec{r}$, osserviamo una variazione al primo ordine di φ pari a

$$\delta\varphi = \varphi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \simeq \vec{\nabla}\varphi \cdot \delta\vec{r} = -\vec{B} \cdot \delta\vec{r}, \quad (2.3)$$

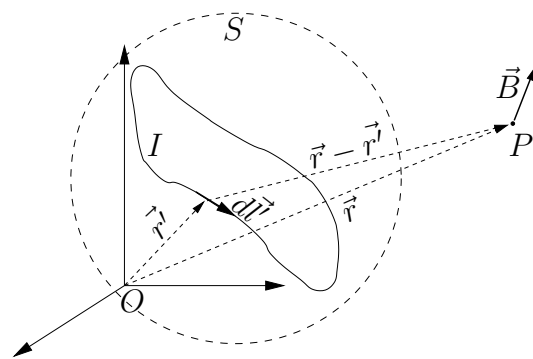


Figura 2.1 Sfera contenente circuito percorso da corrente

da cui inserendo la (2.2) otteniamo

$$\delta\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \cdot (-\delta\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (-\delta\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.4)$$

Si è potuto portare $-\delta\vec{r}$ dentro all'integrale perché indipendente dalla variabile di integrazione.

La figura 2.2 mostra che la variazione di campo che osserviamo se ci spostiamo di $\delta\vec{r}$ da P è la stessa che osserveremmo se restassimo in P , traslando però il circuito di $-\delta\vec{r}$. Usando le proprietà del prodotto triplo, il numeratore della (2.4) può essere riscritto

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (-\delta\vec{r}) = (-\delta\vec{r}) \times d\vec{l}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.5)$$

dove il prodotto $(-\delta\vec{r}) \times d\vec{l}'$ è il vettore elemento di superficie $d\vec{S}'$ sul “nastro” che collega la posizione iniziale del circuito alla posizione dopo la traslazione di $-\delta\vec{r}$, come mostrato in Fig. 2.3. Il prodotto scalare con il versore di $(\vec{r} - \vec{r}')$ proietta $d\vec{S}'$ lungo la direzione di $(\vec{r} - \vec{r}')$, e quindi la superficie dS su un piano perpendicolare a $(\vec{r} - \vec{r}')$. Così l'integrando

$$\frac{(-\delta\vec{r}) \times d\vec{l}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{d\vec{S}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -d\Omega \quad (2.6)$$

è uguale a meno l'angolo solido sotto cui P vede dS' . Il segno meno deriva dal fatto che $(\vec{r} - \vec{r}')$ è diretto verso P anziché verso dS' . Quindi per l'integrale nell'ultimo membro della (2.4) abbiamo

$$\oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (-\delta\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\delta\Omega_\Sigma, \quad (2.7)$$

dove $\delta\Omega_\Sigma$ è l'angolo solido sotto cui P vede la superficie Σ del “nastro” che collega la posizione iniziale del circuito alla posizione finale (Fig. 2.4). Consideriamo adesso la superficie chiusa formata dalle superfici limitate dal circuito nelle posizioni iniziale e finale e dalla superficie laterale (nastro) che le collega, come in Fig. 2.4, e calcoliamo su di essa l'integrale

$$\Omega_{\text{tot}} = \oint \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = 0, \quad (2.8)$$

pari all'angolo solido complessivo sotto cui da P si vede l'intera superficie chiusa. Il vettore $\vec{r} - \vec{r}'$ delle equazioni precedenti è stato sostituito da $\vec{r}' - \vec{r}$, che ha origine in P . Il risultato

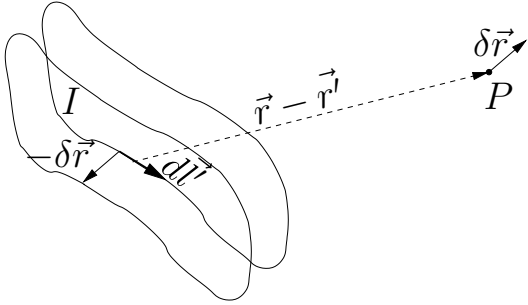


Figura 2.2 Spostare di $\delta\vec{r}$ il punto in cui si misura il campo equivale a restare in \vec{r} e traslare il circuito di $-\delta\vec{r}$

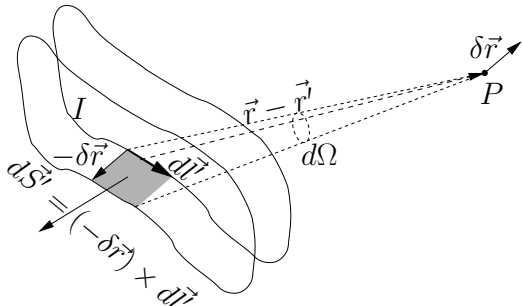


Figura 2.3 Angolo solido sotto cui da \vec{r} si vede $d\vec{S}' = (-\delta\vec{r}) \times d\vec{l}'$

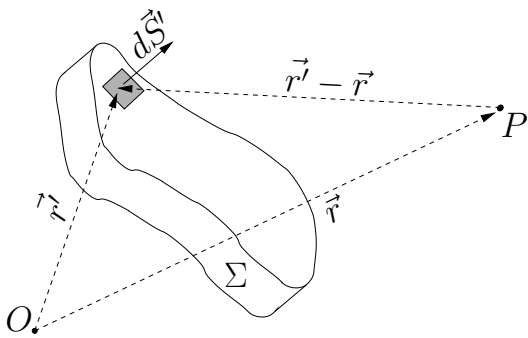


Figura 2.4 Calcolo dell'angolo solido sotto cui da \vec{r} si vede l'intera superficie chiusa

è zero perché il punto P è esterno alla superficie chiusa (teorema di Gauss). Chiamando Ω_i l'angolo solido sotto cui P vede il circuito nella posizione iniziale, e Ω_f quello sotto cui lo vede nella posizione finale, abbiamo $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_f + \delta\Omega_\Sigma - \Omega_i$, dove il segno di Ω_i è dovuto al verso uscente di $d\vec{S}'$. Abbiamo quindi

$$0 = \Omega_{\text{tot}} = \Omega_f + \delta\Omega_\Sigma - \Omega_i, \quad \text{da cui} \quad \delta\Omega_\Sigma = \Omega_i - \Omega_f, \quad (2.9)$$

che, unita alle (2.7) e (2.4) ci dà

$$\delta\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \delta\Omega_\Sigma = \frac{\mu_0}{4\pi} I (\Omega_f - \Omega_i). \quad (2.10)$$

Resta da fare un ultimo aggiustamento. Per un elemento dS di una superficie non chiusa è definita univocamente la direzione del corrispondente vettore $d\vec{S}$, perpendicolare all'elemento di superficie stesso, ma non ne è definito univocamente il verso. Infatti non c'è un criterio per discriminare i due versi possibili. Così finora, per calcolare l'angolo solido sotto cui P vede il circuito, abbiamo arbitrariamente orientato $d\vec{S}'$ in modo da ottenere un angolo solido positivo, come in Fig. 2.5. Ma il fatto che nel circuito scorra una corrente I ci fornisce un criterio per discriminare i due versi possibile di $d\vec{S}'$. In accordo con le convenzioni usuali, prenderemo come verso positivo quello da cui si vede la corrente circolare in senso antiorario. Nel nostro caso, poiché da P si vede scorrere la corrente in senso antiorario, dobbiamo invertire $d\vec{S}'$ rispetto alla figura, e quindi considerare negativo l'angolo solido sotto cui P vede il circuito.

La (2.10) diventa così

$$\delta\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I (\Omega_i - \Omega_f), \quad (2.11)$$

da cui possiamo definire φ come

$$\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Omega + C, \quad (2.12)$$

con C costante arbitraria. Quando usiamo la (2.12) dobbiamo ricordare che l'angolo solido Ω è da considerare positivo se, dal punto in cui calcoliamo φ si vede circolare la corrente in senso orario, negativo altrimenti.

Le cose cominciano a complicarsi un po' se vogliamo il potenziale scalare in un dominio D , sempre semplicemente connesso e non percorso da correnti, ma che intersechi il circuito, come il cilindro della Fig. 2.6. Se ripetiamo i conti fatti fin qui per ricavare il potenziale scalare nei P' e P'' della figura possiamo scrivere in prima istanza

$$\varphi(P') = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Omega' + C', \quad \text{e} \quad \varphi(P'') = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Omega'' + C'', \quad (2.13)$$

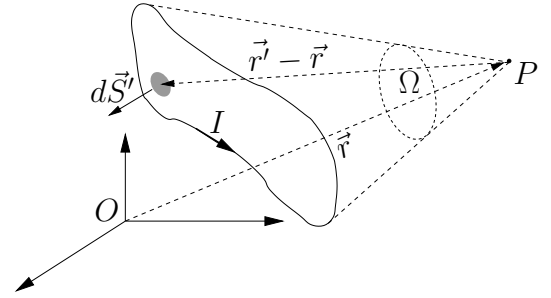


Figura 2.5 Angolo solido sotto cui viene visto il circuito

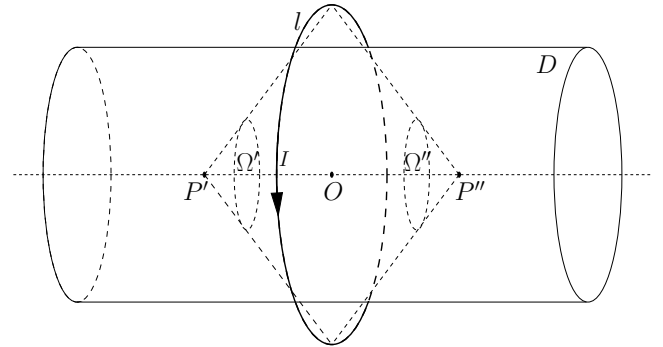


Figura 2.6 Spira percorsa da corrente attraversata da un dominio semplicemente connesso in cui non scorrono correnti

con $\Omega' > 0$ e $\Omega'' < 0$, per quanto detto sopra. Poi poniamo, per esempio, $C' = 0$. Possiamo porre anche $C'' = 0$? Se facciamo tendere P' verso il centro della spira O abbiamo Ω' che tende a 2π , mentre se P'' tende a O l'angolo solido Ω'' tende a -2π . Abbiamo quindi una discontinuità di Ω quando, all'interno del dominio D , attraversiamo il piano della spira. All'interno di D , però, è possibile evitare la discontinuità di φ , e ottenere così \vec{B} dalla (2.1), ponendo

$$C'' = C' - \mu_0 I, \quad \text{per esempio, ponendo } C' = 0 \quad \text{e} \quad C'' = -\mu_0 I, \quad (2.14)$$

in modo che, al tendere di P' e P'' a O , sia $\varphi(P')$ che $\varphi(P'')$ tendano a $-\mu_0 I/2$. Anche in questo caso, per un dominio semplicemente connesso non percorso da correnti, abbiamo potuto scrivere un potenziale scalare da cui ricavare \vec{B} .

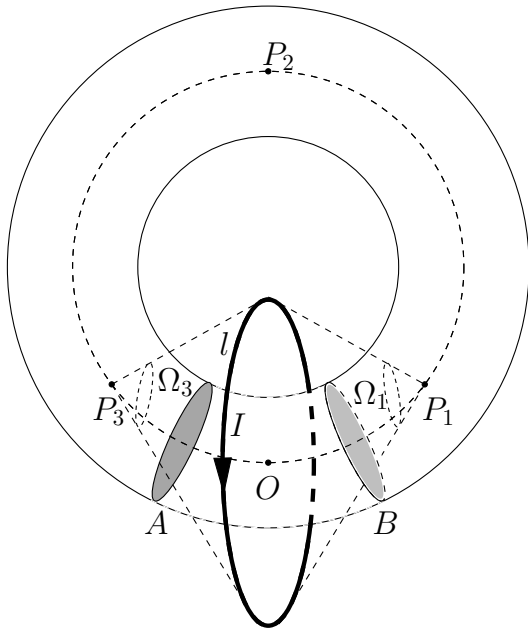


Figura 2.7 Toro concatenato con una spira percorsa da corrente

Consideriamo adesso un dominio non più semplicemente connesso, ma sempre non percorso da correnti, come il toro di Fig. 2.7, concatenato con la solita spira l percorsa dalla corrente I . Con le nostre convenzioni, il punto P_1 vede la spira sotto un angolo solido Ω_1 negativo, mentre P_3 vede la spira sotto un angolo solido Ω_3 positivo. A questo corrisponde una discontinuità nel potenziale se usiamo la (2.12) con la stessa costante C per i due punti P_1 e P_3 , e li facciamo tendere entrambi al centro della spira O . Non abbiamo invece discontinuità se facciamo tendere P_1 e P_3 a P_2 , punto da cui la spira è vista sotto un angolo solido nullo. Possiamo eliminare la discontinuità in O usando le due diverse costanti della (2.14) per P_3 e P_1 , rispettivamente. Questo però introdurrebbe una nuova discontinuità in P_2 . Quindi, all'interno del nostro toro, non attraversato da correnti ma dominio non semplicemente connesso, non riusciamo a definire un'unica funzione per il potenziale scalare magnetico valida su tutto il dominio.

Se però tagliamo dal toro la “fetta di ciambella” compresa tra le sezioni A e B , quello che rimane è un dominio semplicemente connesso. In esso possiamo tranquillamente usare il potenziale scalare dato dalla (2.12), ponendo, per esempio, $C = 0$. In questo modo φ è continuo in P_2 , con $\varphi(P_2) = 0$, mentre il punto O non fa più parte del dominio e non ci preoccupiamo di come vi è definito φ . Questo ci permette di calcolare l'integrale

$$\int_{P_1}^{P_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (2.15)$$

lungo qualunque linea all'interno del nuovo dominio, per esempio lungo l'arco di circonferenza $P_1P_2P_3$. Avremo

$$\int_{P_1}^{P_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_{P_1}^{P_3} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = \varphi(P_1) - \varphi(P_3) = \frac{\mu_0}{4\pi} I [\Omega(P_3) - \Omega(P_1)], \quad (2.16)$$

indipendentemente dal particolare percorso. Se adesso portiamo P_1 sulla sezione B e P_3 sulla sezione A , e assottigliamo sempre più la “fetta di ciambella” facendo tendere A e B verso O ,

l'integrale (2.15) tende alla circuitazione di \vec{B} lungo ad una linea chiusa concatenata con la spira. D'altra parte Ω_3 tende a 2π , mentre Ω_1 tende a -2π . Dalla (2.16) otteniamo così

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (2.17)$$

valida per la circuitazione lungo qualunque linea chiusa concatenata con la spira (e che la attraversi una sola volta). Questo è il teorema della circuitazione di Ampère.

Se il nostro circuito è fatto da un filo di sezione non nulla, all'interno del filo stesso avremo una densità di corrente \vec{J} , e dovremo scrivere la legge di Biot e Savart nella forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx'^3, \quad (2.18)$$

e la (2.17) diventa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (2.19)$$

dove l'integrale a secondo membro è il flusso di \vec{J} attraverso una superficie delimitata dalla linea chiusa su cui si calcola la circuitazione di \vec{B} . Per il teorema di Stokes abbiamo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (2.20)$$

che deve essere valida per qualunque linea chiusa su cui si calcoli la circuitazione di \vec{B} . Deve quindi essere

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.21)$$

che è la 4^a equazione di Maxwell in assenza di campi elettrici variabili nel tempo.