

Fenomeni caotici nella Fascia degli Asteroidi

Mathieu Renzo

Sommario

Lo scopo del presente documento è di fornire una breve introduzione ai fenomeni caotici nella dinamica dei sistemi hamiltoniani (classici), ed illustrarne l'importanza nella determinazione della struttura della Fascia Principale degli asteroidi, con particolare attenzione ai “gaps di Kirkwood”. La struttura del lavoro è la seguente:

- Introduzione matematica “semi-formale”
- Descrizione della fascia degli asteroidi
- Giustificazione teorica della morfologia della fascia

1 Introduzione matematica “semi-formale”

Come è noto i problemi della meccanica hamiltoniana si dividono in due categorie: quelli *canonicamente integrabili* (e.g. il problema dei due corpi), per i quali esiste una trasformazione canonica che permette di rendere cicliche tutte le coordinate¹, e quelli non integrabili (che sono la maggioranza) per i quali una tale trasformazione di coordinate non è possibile. Tuttavia, è spesso possibile ricondursi al caso:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_I \quad (1)$$

dove $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_0(J_j)$ è l'hamiltoniana di un sistema integrabile, $\mathcal{H}_I \equiv \mathcal{H}_I(\psi_j, J_j)$ è una perturbazione moltiplicata per un parametro adimensionale “piccolo” $\varepsilon \ll 1$. L'indice $j = 1, 2, \dots, N$ enumera i gradi di libertà del sistema considerato.

1.1 Sistema imperturbato

Si considera inizialmente il caso $\varepsilon = 0$, e sia N il numero di gradi di libertà del sistema. Si possono scrivere le equazioni del moto di Hamilton nella forma:

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \psi_j} \equiv 0 \quad \dot{\psi}_j = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_j} \stackrel{def}{=} \omega(J_j) \equiv cost. \quad (2)$$

Il flusso hamiltoniano nello spazio delle fasi ($2N$ -dimensionale) è in questo caso confinato su un toro \mathbb{T}^N : il modo più semplice di visualizzare questo fatto è mediante un esempio. Si pensi ad un sistema di due oscillatori armonici disaccoppiati, tali che per le loro frequenze valga $\omega_2 \gg \omega_1$ ². Scegliendo opportune unità di misura, il moto dell'oscillatore di frequenza ω_1 sarà descritto da un punto che si muove su un cerchio del piano (q_1, p_1) dello spazio delle fasi (q_j e p_j non sono le variabili azione-angolo, dato che q_j compaiono in H_0). Durante ogni oscillazione di questo, il secondo oscillatore compirà un grande numero di periodi. Anche sul piano (q_2, p_2) , con le opportune unità di misura, il moto sarà rappresentato da un cerchio. Quindi il punto rappresentativo del sistema dei due oscillatori, appartenente allo spazio delle fasi quadridimensionale (q_1, p_1, q_2, p_2) , sarà vincolato ad una varietà bidimensionale descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} q_1^2 + p_1^2 = \mathcal{H}_1 & ; & \mathcal{H}_1 = cost. \\ q_2^2 + p_2^2 = \mathcal{H}_2 & ; & \mathcal{H}_2 = cost. \end{cases} \quad (3)$$

che sono appunto le equazioni che definiscono \mathbb{T}^2 (si veda [2]).

¹si parla in questo caso di variabili angolo $\{\psi\}$, poiché si può fare in modo che tutte le dipendenze da queste siano 2π -periodiche (si veda [3]); ed i momenti coniugati $\{J\}$, che sono ovviamente conservati, vengono detti azioni. Il nome dato a variabili e momenti è di facile comprensione dall'analisi dimensionale dell'hamiltoniana, che assume la forma: $\mathcal{H}_0 = \sum_{j=1}^N J_j \omega(J_j)$. Si veda anche il seguito per la notazione.

²questa ipotesi serve solamente a facilitare la visualizzazione dell'esempio, non è quindi essenziale

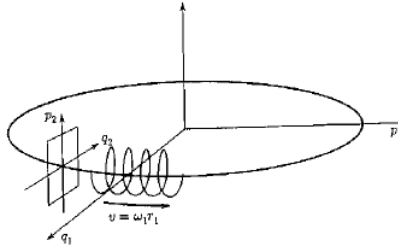


Figura 1: rappresentazione grafica di quanto descritto nel testo. Durante un periodo dell'oscillatore 1, l'altro compie numerosi cicli che si avvolgono attorno alla traiettoria del punto che rappresenta solo il primo oscillatore. La figura è la 11.2 di [1]

È interessante notare un fatto: se il rapporto $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$, allora l'orbita del punto rappresentativo è chiusa, e ci saranno alcuni punti del toro \mathbb{T}^2 che vengono raggiunti da questa, mentre altri sicuramente non lo sono. Questo è il caso tipico di una risonanza (si veda Sec. (1.2) per una definizione più rigorosa), e si parla quindi di *tori risonanti*. Se invece $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cioè le frequenze sono incommensurabili, allora l'orbita non è chiusa: con lo scorrere del tempo, il punto rappresentativo ricoprirà l'intero toro \mathbb{T}^2 , passando da ogni punto una ed una sola volta. Si dice in questo caso che il moto è *ergodico*, e i tori corrispondenti sono detti *non risonanti* o *ergodici*. Questo è un fatto generale che vale anche con $N > 2$.

In sostanza lo spazio delle fasi di un sistema hamiltoniano integrabile è *foliato* in tori \mathbb{T}^N , ciascuno caratterizzato da un vettore di frequenze $\boldsymbol{\omega} = (\omega(J_1), \dots, \omega(J_j), \dots, \omega(J_N)) \in \mathbb{R}^N$ diverso³.

Un sistema si dice *non degenero* se le frequenze $\omega(J_j)$ sono indipendenti tra di loro, ovvero l'hessiano dell'hamiltoniana imperturbata (rispetto alle sue uniche variabili J_j) è non nullo:

$$\det \left(\frac{\partial \omega(J_j)}{\partial J_i} \right) \equiv \det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_j \partial J_i} \right) \neq 0 \quad (4)$$

Si osserva che l'insieme dei tori ergodici (non risonanti) per un sistema non degenero è denso nello spazio delle fasi (come $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{Q}^N$ è denso in \mathbb{R}^N). Anche l'insieme dei tori risonanti è denso nello spazio delle fasi (come \mathbb{Q}^N è denso in \mathbb{R}^N), ma la misura di Lebesgue di questo insieme è nulla. La dimostrazione di questo ultimo fatto è relativamente semplice. Partiamo da un caso con $N = 2$ gradi di libertà, come quello dell'esempio precedentemente discusso: è possibile associare ad ogni toro risonante un numero razionale (il rapporto tra le due frequenze), e dato che i numeri razionali sono numerabili, ne segue che anche i tori risonanti sono un insieme numerabile, e quindi la loro misura di Lebesgue è nulla. Il caso di un sistema hamiltoniano non degenero⁴ con N generico può essere visto come prodotto cartesiano di sistemi hamiltoniani di gradi di libertà $n = 2$ e $n = 1$. Dato che il prodotto cartesiano di insiemi numerabili è a sua volta numerabile, questo dimostra l'asserzione.

Una rappresentazione delle soluzioni di un sistema hamiltoniano che è spesso utile (soprattutto nel caso $N = 2$) è la *Sezione di Poincaré*. Questa si costruisce *campionando* il moto ad intervalli, ed il modo più comune di farlo è proiettandolo su una sezione trasversale dello spazio delle fasi. Come già detto, in generale questo è uno spazio $2N$ -dimensionale; per costruirne una sezione trasversale su cui proiettare il moto, si fissa l'energia totale $\mathcal{H} \equiv E$, ottenendo una varietà $(2N - 1)$ -dimensionale (detta *ipersuperficie isoenergetica*). Successivamente si implementa un ulteriore vincolo (fissando ad esempio

³Si noti che per ogni grado di libertà esiste un momento coniugato J_j ed una frequenza associata. Questo è caratteristico dei sistemi integrabili, per i quali l'esistenza di N integrali primi del moto in *involuzione* permette di risolvere il sistema di $2N$ equazioni differenziali di hamilton (*Teorema di Arnol'd Liouville*, vedi [3])

⁴questa ipotesi è necessaria affinché le frequenze siano indipendenti e quindi il problema risulti separabile (modi normali)

una delle variabili) e, proiettando il moto sulla varietà $(2N - 2)$ -dimensionale così costruita, si ottiene la sezione di Poincaré. Questa rappresentazione è particolarmente comoda per $N = 2$, poiché in tal caso la sezione di Poincaré è un piano sul quale le orbite vengono rappresentate con punti corrispondenti ad un attraversamento del piano in un dato verso. Un esempio di sezione di Poincaré è quindi già stato dato: i piani (q_1, p_1) e (q_2, p_2) della Fig. (1) sono delle sezioni di di Poincaré, ottenute tagliando l'ipersfera isoenergetica⁵ con il vincolo arbitrario $p_2 = \text{cost.}$ o $p_1 = \text{cost.}$ rispettivamente.

1.2 Risonanze

Si parla di risonanza quando in un sistema hamiltoniano si hanno due o più frequenze in rapporto razionale tra di loro. In questi casi l'orbita del sistema si richiuderà su se stessa dopo un certo numero di periodi.

Ovviamente qualsiasi coppia di frequenze è arbitrariamente vicina ad una risonanza (poiché \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R}), ma hanno effetti significativi sulla dinamica solamente le risonanze caratterizzate da rapporti tra numeri interi piccoli (3:1, 2:3, 1:2, etc..). Infatti nel caso in cui gli interi siano molto grandi, il numero di periodi necessario affinché l'orbita si chiuda è parimente grande, e la maggior parte del dominio accessibile dello spazio delle fasi verrà ricoperta dall'orbita (anche se a rigore non tutto). Una giustificazione più formale verrà data nel seguito.

Per lo studio della dinamica asteroidale sono particolarmente importanti le risonanze con i corpi planetari. È quindi conveniente introdurre una trattazione perturbativa⁶, in cui si ha una hamiltoniana che descrive il moto eliocentrico kepleriano di un corpo, più un termine correttivo \mathcal{H}_I dovuto alle interazioni (gravitazionali) con gli altri corpi. Quest'ultimo potrà essere scritto in serie di Fourier:

$$\mathcal{H}_I = C \cdot A_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, m} \cos(\sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, m}) \quad (5)$$

dove si sottintende la somma su indici e multiindici ripetuti, C è una opportuna costante dimensionale e vale:

$$\sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, m} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda} + k\lambda + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\varpi} + l\varpi + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega} + m\Omega \quad (6)$$

con il punto ad indicare il prodotto scalare standard; $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^Q$ e Q numero di corpi perturbanti (e.g. 8 se si volesse studiare il moto di un asteroide perturbato da tutti i pianeti); e

$$\boldsymbol{\varpi} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varpi} + M \equiv \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} + M \quad (8)$$

con Ω "longitudine media del nodo", ω "argomento del pericentro" e M "anomalia media" (si veda [4] per le definizioni). I vettori $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^Q$ contengono gli angoli corrispondenti per i vari corpi perturbanti. Formalmente si ha una risonanza quando:

$$\frac{d}{dt} \sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, m} = 0 \quad (9)$$

ovvero quando l'argomento del coseno in Eq. (5) diventa stazionario e l'effetto della perturbazione non si media più a zero su ogni periodo, ma si accumula fino a diventare eventualmente significativo.

Si può a questo punto delineare una spiegazione più soddisfacente del fatto che le risonanze con rapporti tra numeri interi grandi non siano particolarmente significative: dato che la serie di Fourier Eq. (5) converge, i termini caratterizzati da indici grandi saranno naturalmente "piccoli" (ovvero $|A_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, m}|^2 \ll 1$). Di conseguenza una risonanza con interi grandi dà effetti su un termine di Fourier che è già di per sé piccolo.

Un'altra caratteristica interessante delle risonanze è che *localmente ogni risonanza può essere approssimata con un pendolo*⁷: qualunque sia il termine dell'hamiltoniana che causa la risonanza potrà essere

⁵assumendo di usare le unità di misura in cui la traiettoria di ciascun oscillatore separatamente è una circonferenza

⁶le interazioni sono di natura gravitazionale, quindi proporzionali alla massa; detta m la massa del pianeta perturbante, vale $m/M_\odot \leq m_{\text{giove}}/M_\odot \sim 9.5 \cdot 10^{-4}$

⁷nel senso che l'hamiltoniana del sistema risonante può essere approssimata da un hamiltoniana di un pendolo semplice

sviluppato in serie di Fourier. Tenendo solo l'addendo dominante di questa serie si ottiene un termine di potenziale oscillante, ad esempio per un sistema con due gradi di libertà:

$$\mathcal{H} \simeq \frac{p^2}{2m} + \text{cost.} \cos(q) \quad (10)$$

Ovviamente questa approssimazione è piuttosto grossolana (non sempre è sufficiente tenere un unico termine di Fourier per descrivere il sistema in maniera realistica), ma permette di capire qualitativamente una conseguenza importante della presenza di risonanze. Si può infatti affermare che, almeno localmente, lo spazio delle fasi di un sistema risonante è approssimabile con quello di un pendolo semplice, Fig. (2).

È ben noto che lo spazio delle fasi di un pendolo semplice è diviso in due regioni:

- *regione di librazione*: è la regione che corrisponde ad un moto oscillatorio attorno alla posizione di equilibrio stabile
- *regione di circolazione*: è la regione che corrisponde ad una crescita lineare della variabile angolare del pendolo, cioè ad un moto circolare attorno al perno.

Queste due regioni, in cui la dinamica è completamente diversa, sono divise da una curva detta *separatrice*.

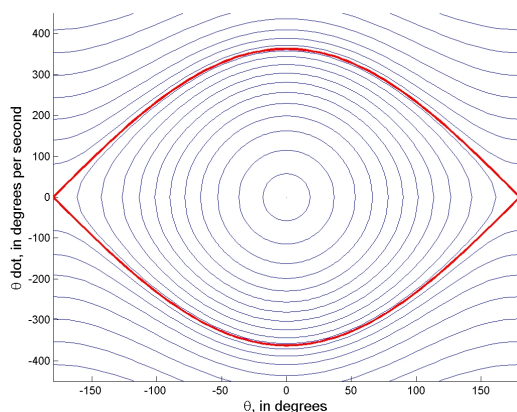


Figura 2: Spazio delle fasi di un pendolo semplice di massa unitaria ($p_\theta \equiv \dot{\theta}$). La linea **rossa** è la separatrice, la regione interna è detta di librazione, e corrisponde ad un moto oscillatorio; quella esterna invece è la regione di circolazione, che corrisponde ad un moto circolare con θ che cresce linearmente nel tempo. La figura è stata presa da http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Separatrix_for_a_Simple_Pendulum.png

Anche nel caso di una risonanza, quindi, si introduce una *discontinuità topologica* nello spazio delle fasi, con regioni di librazione e di circolazione. La presenza di questa discontinuità complica enormemente anche i casi in cui l'hamiltoniana risonante è integrabile, poiché rende necessario introdurre variabili azioni-angolo diverse in ogni regione.

Si può anche dimostrare che la presenza di una risonanza rende non integrabile un sistema perturbato, *indipendentemente dalla forma della perturbazione*. Per semplicità si considera qui un caso particolare di facile generalizzazione, seguendo [6]. Si prende il sistema hamiltoniano integrabile (la dipendenza funzionale è già stata ridotta al minimo scegliendo variabili azione-angolo):

$$\mathcal{H}_0(J_j) = \sum_{j=1}^N \omega_j J_j \quad (11)$$

dove per semplicità si assume che le frequenze siano tutte costanti. La perturbazione che si vuole introdurre per passare da $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$ potrà essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\mathcal{H}_I = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\psi}} \quad (12)$$

dove $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_j, \dots, \psi_N)$ è il vettore delle variabili angolo (che non compaiono nell'hamiltoniana integrabile Eq. (11)). Per vedere se il sistema \mathcal{H} è ancora integrabile è necessario effettuare un cambio di variabili:

$$J_j = J'_j - \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} \frac{c_{\mathbf{k}} k_j}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\psi}} \quad \psi_j \equiv \psi'_j \quad (13)$$

di modo che in funzione delle nuove variabili l'hamiltoniana diventi:

$$\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \rightarrow \mathcal{H}(J'_j) = \sum_{j=1}^N \omega_j J'_j$$

Resta da verificare che il cambio di variabile Eq. (13) sia effettivamente canonico, ma soprattutto che sia possibile: è infatti necessario provare la convergenza della serie che definisce le nuove variabili azione. Senza addentrarsi in questa dimostrazione (riportata in [6]), si può vedere che nel caso di un sistema risonante questa serie divergerà: per definizione di risonanza $\exists \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$ tale che $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Questo si traduce nell'impossibilità di prevedere la dinamica di un sistema hamiltoniano risonante su scale temporali sufficientemente "lunghe" (rispetto al tempo caratteristico della piccola perturbazione introdotta).

In generale una risonanza può avere sia un effetto stabilizzatore sul sistema (*resonant locking*), sia, invece, causare una fragilità della configurazione dinamica e facilitare la rottura dell'equilibrio. Nel sistema solare sono presenti esempi di entrambi questi effetti: la risonanza di Nettuno e Plutone, i Troiani di Giove, l'accoppiamento spin-orbita di Mercurio sono esempi di *resonant locking*, mentre nello studio del moto degli asteroidi della fascia principale si incontrano numerose instabilità dovute proprio alle risonanze.

Per la dinamica degli asteroidi sono importanti due tipi di risonanze, descritti separatamente nel seguito.

1.2.1 Risonanze di moto medio

Sono le risonanze in cui le frequenze commensurabili sono quelle di rivoluzione (ovvero le frequenze orbitali). In questo caso si ha:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \dot{\boldsymbol{\varpi}}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}, \dot{\boldsymbol{\varpi}} \ll \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}} \quad (14)$$

dove si intende che ogni componente dei vettori al primo membro è molto minore di ogni componente dei vettori al secondo membro. Di conseguenza si può prendere:

$$\frac{d}{dt} \sigma_{\mathbf{k}, k, l, l, \mathbf{m}, m} \simeq \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} + k \dot{\lambda} = 0 \quad (15)$$

ed al variare di $l, m, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ si costruiranno i cosiddetti "multipletti di risonanza".

I casi significativi nella dinamica della fascia degli asteroidi sono solamente quelli in cui \mathbf{k} ha uno o al massimo due componenti non nulle (cioè rispettivamente le risonanze asteroide-pianeta o asteroide-pianeta1-pianeta2).

1.2.2 Risonanze Secolari

Sono le risonanze in cui nella Eq. (6) non compaiono le frequenze del moto orbitale, ma solamente quelle con periodi molto più lunghi (precessione del perielio e/o variazione dell'argomento del pericentro). Per trattare questo caso quindi non è conveniente adoperare le variabili λ e ϖ , ma conviene esplicitare ogni addendo. Dato che ai fini pratici sono significative solamente risonanze secolari a due corpi ($Q = 1$), si può scrivere semplicemente, indicando con il pedice p le grandezze relative al corpo perturbante:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{k}, k, l, l, \mathbf{m}, m} &\equiv k_p \omega_p + k_p \Omega_p + k_p M_p + k \omega + k \Omega + k M + l_p \omega_p + l_p \Omega_p + l \omega + l \Omega + m_p \Omega_p + m \Omega = \\ &= (k_p + l_p) \omega_p + (k_p + l_p + m_p) \Omega_p + k_p M_p + (k + l) \omega + (k + l + m) \Omega + k M \end{aligned} \quad (16)$$

Si avrà quindi una risonanza secolare quando $k = k_p = 0$, ovvero non si ha alcuna dipendenza dalle frequenze orbitali; che qui compaiono nell'anomalia media.

1.3 Introduzione della perturbazione e comportamento caotico

La domanda alla quale si vuole rispondere ora è: cosa succede ai tori dello spazio delle fasi introducendo una perturbazione che rende non integrabile il sistema?

In generale, introducendo la perturbazione $\varepsilon\mathcal{H}_I$, il moto non avverrà più sulla superficie di un toro.

È opportuno distinguere i tori del sistema imperturbato in due categorie, in base a ω . Un toro si dice “fortemente non risonante” o “diofanteo” se il vettore di frequenze che lo caratterizza, ω , verifica la *condizione diofantea* espressa da Eq. (17) in tutto lo spazio delle fasi⁸:

$$\exists \gamma, \tau > 0 \quad \text{tali che} \quad |\mathbf{k} \cdot \omega| > \gamma |\mathbf{k}|^\tau \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \quad (17)$$

Si può dimostrare che il numero di tori che verifica questa condizione è non nullo se e solo se $\tau \geq N - 1$. In particolare per $\tau = N - 1$ si avrà un unico toro diofanteo, mentre per τ maggiori l’insieme dei tori diofantei ha misura di Lebesgue proporzionale al parametro $(1 - \gamma)$. La condizione Eq. (17) è una condizione sufficiente a far convergere le serie perturbative classiche, come quella che compare in Eq. (13); infatti garantisce che i tori che la verificano siano sufficientemente “lontani” da una risonanza.

La condizione Eq. (17) è una condizione “tecnica” di difficile interpretazione fisica, la cosa importante è che esistono tori che la verificano, e che anzi, per una opportuna scelta delle costanti γ e τ questi formano un insieme il cui complementare ha misura di Lebesgue nulla.

Questa definizione di tori *fortemente non risonanti* permette di enunciare il seguente risultato teorico (dovuto a Kolmogorov, Arnol’d e Moser, da cui l’acronimo). La dimostrazione viene qui solamente accennata, seguendo la linea esposta in [3].

1.3.1 Teorema KAM

Sia \mathcal{H}_0 una hamiltoniana integrabile, non degenera e analitica in $J_j \forall j$. Introducendo una perturbazione $\varepsilon\mathcal{H}_I$ conservativa, analitica in J_j , analitica e 2π -periodica in ψ_j ; i tori diofantei del sistema imperturbato non vengono distrutti, ma solamente deformati. L’insieme complementare a quello dei tori diofantei ha misura di Lebesgue proporzionale a $\sqrt{\varepsilon}$.

Il teorema KAM garantisce quindi che lo spazio delle fasi del sistema perturbato è ancora foliato in tori, per di più ergodici, che si possono ottenere con una trasformazione canonica delle coordinate partendo dai tori deformati del sistema imperturbato.

Cenno alla dimostrazione del teorema KAM: Per dimostrare questo teorema si fissa un toro diofanteo (di frequenze ω) del sistema imperturbato \mathcal{H}_0 e si cerca in un suo intorno, un toro invariante del sistema perturbato $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_I$, caratterizzato dalle stesse frequenze. Cioè, si procede mantenendo fissate le frequenze e si variano le condizioni iniziali del moto per ritrovare un toro (che sarà spostato e deformato rispetto a quello del sistema imperturbato) del sistema perturbato. La variazione delle condizioni iniziali necessaria è dello stesso ordine di grandezza della perturbazione introdotta. La ricerca dei tori invarianti viene effettuata con un algoritmo rapidamente convergente.

Il teorema KAM non dà nessuna informazione su cosa succeda ai tori che non sopravvivono alla perturbazione. Tra questi ve ne saranno alcuni ergodici (cioè non risonanti), ma che non verificano Eq. (17), ed altri invece risonanti. I primi (quelli non risonanti e non diofantei) formano un insieme a misura nulla: se si perturba un sistema non risonante, la probabilità che le soluzioni non rimangano regolari sarà nulla. Per i secondi (cioè quelli risonanti), invece, non è ancora stata sviluppata una trattazione generale, ma ci si aspetta che questi vengano distrutti e che le orbite del sistema \mathcal{H}_0 che giacevano su questi diventino *caotiche*.

1.3.2 Moto Caotico

Un sistema hamiltoniano si definisce caotico se c’è una elevata sensibilità alle condizioni iniziali, che rende impossibile la previsione della traiettoria nello spazio delle fasi, nonostante sia le equazioni della dinamica che le loro soluzioni siano pienamente **deterministiche**. Infatti, nel caso di una evoluzione

⁸in generale $\omega \equiv \omega(\mathbf{J})$

caotica, sarebbe necessario conoscere i dati iniziali con precisione infinita (i.e. infinite cifre significative) per poter costruire con certezza l'orbita, poiché in questo regime la differenza tra due soluzioni qualsiasi f e g con dato iniziale in $t = t_0$ cresce (*inizialmente*) in maniera esponenziale:

$$\delta(t) \stackrel{def}{=} f(t, t_0) - g(t, t_0) \Rightarrow \delta(t) = \delta(t_0)e^{\mu t} \quad (18)$$

Il parametro $\mu (> 0$ se si ha un comportamento caotico) prende il nome di *esponente di Lyapunov*⁹, ed il suo inverso $1/\mu$ è il tempo di Lyapunov, ovvero il tempo caratteristico in cui diventa evidente la natura caotica della dinamica. È necessario precisare meglio in che senso la Eq. (18) è valida *inizialmente*: il comportamento caotico delle soluzioni è caratterizzato dall'**imprevedibilità**¹⁰, e non necessariamente dall'allontanamento divergente delle soluzioni inizialmente vicine. Si possono avere anche casi in cui la regione dello spazio delle fasi accessibile al moto è *finita*, e quindi l'allontanamento all'infinito delle soluzioni è impossibile (comportamento caotico *locale*). In questo senso la differenza cresce solo inizialmente in modo esponenziale: una volta che le due orbite caotiche hanno raggiunto la massima distanza possibile, i punti rappresentativi delle soluzioni si muoveranno in maniera stocastica nel dominio accessibile al moto.

Un esempio in cui la regione dello spazio delle fasi accessibile è finita si può costruire con un sistema a due gradi di libertà ($N = 2$): i tori del sistema perturbato (la cui esistenza è garantita dal teorema KAM) separano lo spazio delle fasi in regioni disconnesse (quella interna e quella esterna a ciascun toro). Nessuna orbita caotica può infatti attraversare un toro KAM: questi per ipotesi sono tori ergodici (non risonanti), quindi in ogni punto della loro superficie passa un'orbita regolare, e di conseguenza non può passarvi una diversa soluzione. Se per assurdo succedesse, dando le condizioni iniziali in quel punto si avrebbero due diverse soluzioni delle equazioni del moto, quella caotica e quella regolare, violando il teorema di unicità delle soluzioni di Cauchy-Lipschitz.

Di questo fatto si può dare una rappresentazione grafica intuitiva: invece di guardare lo spazio delle fasi si può guardare lo spazio delle frequenze. Fissata l'energia totale, lo stato del sistema può essere individuato con un'unica coordinata $x = \omega_1/\omega_2$. In questa rappresentazione i tori KAM invariati saranno tutti i numeri sulla retta x corrispondenti a rapporti diofantei tra frequenze, ed è chiaro che ognuno di questi punti separa in 2 la retta:



Figura 3: $N = 2$. La retta rappresenta l'asse $x = \omega_1/\omega_2$. I punti A, B e C rappresentano tori KAM, corrispondenti a frequenze diofantee (cioè fortemente non risonanti) e che sopravvivono alla perturbazione, le regioni tra essi compresi invece corrispondono ad orbite caotiche, che non giacciono più su un toro, che non potendo attraversare i tori KAM sono confinate in tale regione. Si noti che i tori KAM sono qui rappresentati come punti isolati solo per comodità di visualizzazione. La figura riproduce parte di Fig. (4) di [6].

Questo esempio fallisce chiaramente per $N > 2$, ad esempio per $N = 3$, nella rappresentazione nello spazio delle frequenze si avranno 2 coordinate indipendenti, ad esempio, $x = \omega_1/\omega_2$ e $y = \omega_2/\omega_3$, e i tori KAM corrisponderanno a punti su un piano ad energia fissata, vedi Fig. (4), che non lo dividono in zone disconnesse. Per $N > 2$ si avranno quindi fenomeni di *diffusione*¹¹ delle orbite nello spazio delle fasi (comportamento caotico *globale*).

⁹nel caso di sistemi con N gradi di libertà l'esponente di Lyapunov sarà il più grande tra gli esponenti dei vari gradi di libertà. Inoltre in generale $\mu \equiv \mu(f, g)$ dipende dalle soluzioni considerate, e una definizione rigorosa deve quindi prevedere una media su tutte le soluzioni del moto f, g possibili per una piccola variazione delle condizioni iniziali.

¹⁰la stessa imprevedibilità che compare su scale temporali "lunghe" nel caso di perturbazioni ad un sistema hamiltoniano risonante

¹¹il termine diffusione viene adoperato in senso improprio in meccanica hamiltoniana, ed indica un generico cambiamento delle variabili azione, che non sono più conservate, anche se questo cambiamento non è in alcun senso descritto dalle equazioni differenziali tipiche dei fenomeni diffusivi

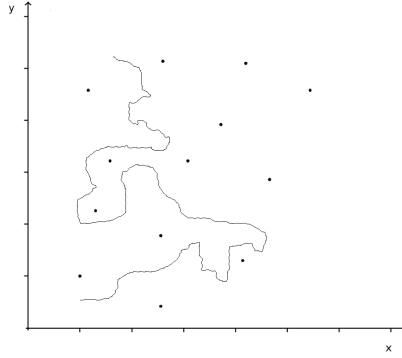


Figura 4: $N = 3$. Il piano rappresenta schematicamente una sezione dello spazio delle frequenze ad energia fissata di coordinate $x = \omega_1/\omega_2$ e $y = \omega_2/\omega_3$. I punti corrispondono a tori KAM che sopravvivono alla perturbazione, individuati da un vettore di frequenze $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ diofanteo. Come si vede questi non dividono (necessariamente) il piano in regioni disconnesse, e sono possibili orbite caotiche che si allontanano indefinitamente dalla regione iniziale, come ad esempio quella tracciata con una linea. Si noti che i tori KAM sono qui rappresentati come punti isolati solo per comodità di visualizzazione. La figura riproduce parte di Fig. (4) di [6].

In sostanza il moto caotico può essere pensato come una via di mezzo tra una regolare traiettoria deterministica ed un vagare completamente casuale. Due proprietà interessanti del moto caotico sono:

- **mixing**: $\forall \Omega_1, \Omega_2$ insiemi aperti del dominio del moto nello spazio delle fasi, fissata una qualunque orbita caotica tale che $f(t) \in \Omega_1 \Rightarrow \exists t'$ tale che $f(t') \in \Omega_2$. Cioè fissata un'orbita caotica f questa attraversa necessariamente tutto il dominio accessibile al moto.
- **densità**: $\forall \varepsilon > 0$, fissato un qualunque punto P del dominio del moto nello spazio delle fasi, in un intorno $B_\varepsilon(P)$ di questo passa sempre almeno un'orbita caotica. Cioè fissato un punto qualsiasi esiste un'orbita caotica che gli passa arbitrariamente vicino.

Si noti che quest'ultima proprietà è analoga a quella delle orbite non risonanti del sistema imperturbato (prendendo P appartenente all'opportuno toro).

Per chiarire la differenza tra i due casi è utile introdurre la definizione di **attrattore dinamico**: si definisce attrattore dinamico un qualunque sott'insieme A di punti dello spazio delle fasi che goda delle seguenti proprietà

1. $f(t_0, t_0) \in A \Rightarrow f(t, t_0) \in A \quad \forall t \geq t_0$, cioè l'evoluzione temporale mantiene i punti inizialmente in A dentro A stesso
2. $\forall O$ intorno aperto di A , $\exists B \equiv B(A)$ tale che, se $f(t_0, t_0) \in B \Rightarrow \exists T > t_0$ tale che $\forall t \geq T \Rightarrow f(t, t_0) \in O$, ovvero esiste un insieme B (detto *bacino di attrazione di A*), tale che se un'orbita parte da questo insieme, evolve necessariamente verso A
3. nessun sott'insieme proprio di A verifica le proprietà 1 e 2

Mentre nel caso imperturbato (con moto regolare) si può vedere il toro come un attrattore dinamico che coincide con l'intero dominio dello spazio delle fasi accessibile al moto, il caso di orbite caotiche può essere pensato come evoluzione¹² verso un *attrattore strano*, formato da un insieme di punti non localizzato, ma sparso su tutto il dominio del moto, di dimensione frattale. In questo modo si può avere una idea intuitiva della causa dell'ergodicità del moto caotico (i.e. delle sue proprietà di mixing e densità).

¹²sulla base delle evidenze negli "esperimenti" numerici

Esempio: l'attrattore di Lorenz. Gli esempi di attrattori strani presenti in letteratura sono numerosi, quello storicamente più importante è probabilmente l'attrattore di Lorenz¹³. Questo caratterizza le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione dell'atmosfera terrestre, schematizzata come un fluido confinato in un certo volume:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x - y) \\ \frac{dy}{dt} = Rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - By \end{cases} \quad (19)$$

dove $P \stackrel{def}{=} \nu/\sigma$ è il numero di Prandtl dato dal rapporto tra coefficiente di viscosità e conducibilità termica del fluido, R è legato alla massima variazione di temperatura, e B è il rapporto tra larghezza e altezza della scatola in cui si suppone confinato il fluido. La risoluzione numerica del sistema Eq. (19) mostra un comportamento caotico, con le soluzioni che evolvono attorno al cosiddetto *attrattore di Lorenz*, Fig. (5). Tipicamente si preferisce visualizzare questo attrattore nello spazio fisico (x, y, z) , di dimensione minore rispetto allo spazio delle fasi (x, p_x, y, p_y, z, p_z) ¹⁴. Per altri esempi celebri (mappa logistica, hamiltoniana di Hénon-Heiles, etc...) si vedano [1] o [4].

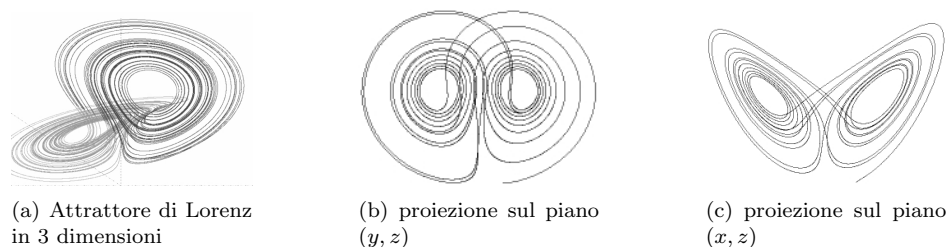


Figura 5: Rappresentazione grafica delle soluzioni del sistema Eq. (19). Queste evolvono lungo le due “spirali” in maniera casuale, passando da una all'altra in modo imprevedibile. Queste spirali “tracciano” l'attrattore del sistema, che ha dimensione maggiore di 2, ma minore di 3. È da sottolineare che, nonostante le apparenze, la soluzione non si auto-interseca mai. La forma di questo attrattore ha suggerito la famosa formulazione “divulgativa” della teoria del caos, il cosiddetto *effetto farfalla*. Le figure sono state prese da: <http://www.stsci.edu/~lbradley/seminar/attractors.html>

1.4 Legame tra risonanze e caos

Le risonanze sono la strada più comune che porta ad evoluzione caotica.

1.4.1 Criterio di Chirikov

Nel 1979 è stato sviluppato in maniera euristica da Chirikov un criterio per discutere il passaggio da una evoluzione regolare ad una caotica. Questo criterio ha però dei limiti: non ha una formalizzazione matematica precisa, e permette solamente stime quantitative molto larghe (tipicamente la transizione verso il comportamento caotico avviene prima di quanto preveda questo criterio). Tuttavia, nei casi di interesse per la fascia degli asteroidi è sufficiente a spiegare un buon numero di osservazioni.

Come è noto ad ogni risonanza corrisponde una certa regione dello spazio delle fasi. Il criterio di Chirikov stabilisce che: **un'orbita che parte da una regione in cui si sovrappongono due risonanze mostrerà una evoluzione caotica**. La giustificazione intuitiva è piuttosto semplice: la traiettoria nello spazio delle fasi “non sa a quale risonanza appartiene” e di conseguenza si alterna tra le due.

¹³che nel 1963 fu il primo a scoprire il comportamento caotico con simulazioni numeriche

¹⁴per poter visualizzare senza approssimazioni un attrattore strano su un foglio servirebbe uno spazio delle fasi bidimensionale, cioè un sistema hamiltoniano con un solo grado di libertà, ma è ben noto che tutti i sistemi con un unico grado di libertà sono integrabili e non mostrano quindi comportamenti caotici, né attrattori strani

1.4.2 Modello di diffusione caotica lungo linee risonanti

Sfruttando il criterio di Chirikov è facile costruire un modello di diffusione caotica, valido ogni qual volta ci sia una “catena di risonanze”, ovvero una serie di regioni di librazione dello spazio delle fasi a due a due sovrapposte come in Fig. (6). Un’orbita potrà quindi “vagare” nello spazio delle fasi, passando da una regione all’altra. Ovviamente questo tipo di diffusione deve necessariamente seguire queste “catene di risonanze” nello spazio delle fasi ed è bloccata dalla presenza di tori KAM, che separano le regioni corrispondenti a risonanze ed impediscono che vi sia una sovrapposizione tra queste, rompendo la catena.

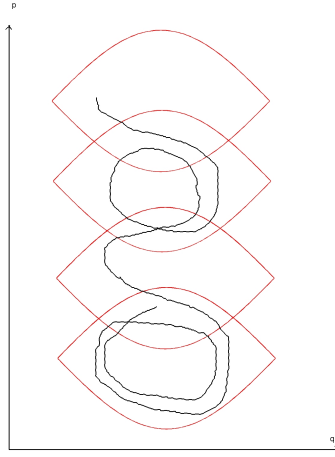


Figura 6: Rappresentazione schematica del modello di diffusione di Chirikov. Le linee rosse rappresentano separatrici di diverse risonanze che si sovrappongono. La linea nera rappresenta un’orbita caotica che parte da una regione di sovrapposizione e si diffonde lungo la catena di risonanze. Si noti che una traiettoria non può mai auto-intersecarsi: la linea tracciata deve essere pensata come proiezione di un’orbita in uno spazio a dimensione maggiore su un opportuno piano (p, q) . La figura riproduce Fig. (16) di [6].

2 Asteroidi

Si definiscono “Asteroidi” tutti i corpi minori del sistema solare di tipo non cometario in orbita eliocentrica con semiasse maggiore a minore o uguale a quello di Giove: $a \leq a_G$.

La maggior parte della massa degli asteroidi si trova in una fascia tra l’orbita di Marte e quella di Giove, detta “Fascia Principale” o “Main Belt”.

Una componente particolarmente significativa è quella dei NEO (“Near Earth Objects”), che sono oggetti con orbite di raggio $0.98A.U. \leq r \leq 1.3A.U.$, che quindi possono incrociare l’orbita della Terra ed eventualmente collidere con questa.

2.1 Fascia principale

La Fascia Principale degli asteroidi (o più precisamente la Fascia Principale Interna¹⁵) è compresa tra $2.1A.U.$ e $3.3A.U.$ La descrizione dinamica degli oggetti che popolano questa fascia è estremamente complicata: essa dipende sia da interazioni di tipo gravitazionale (spesso sono significative le correzioni dovute ai pianeti limitrofi: Marte, Giove e Saturno), sia da fenomeni legati essenzialmente alla radiazione (effetto Yarkovsky, YORP, Poynting-Robertson, significativi soprattutto sugli oggetti di dimensioni $d \lesssim 20Km$, cioè “piccoli”), sia, infine, dai processi collisionali interni alla fascia. L’insieme di questi fenomeni porta ad una struttura peculiare della fascia degli asteroidi, che tipicamente viene descritta utilizzando come coordinate gli *elementi propri*.

¹⁵Si trova un ristretto numero di asteroidi ad a maggiori, in particolare la famiglia di *Hildas*, e sono genericamente indicati come Fascia Principale Esterna

2.1.1 Elementi osculanti ed elementi propri

Nel sistema solare la forza predominante è l'attrazione gravitazionale del Sole, e (salvo incontri ravvicinati) le correzioni a questa sono al massimo¹⁶ $O(10^{-3})$, si possono quindi descrivere le orbite assumendo che l'effetto di tali perturbazioni sia trascurabile su un periodo. Si dice *osculante* l'orbita kepleriana eliocentrica approssimata, valida per una singola rivoluzione. Gli *elementi osculanti* sono i parametri di questa orbita: semiasse maggiore a_{osc} , eccentricità e_{osc} ed inclinazione rispetto al piano dell'eclittica I_{osc} , che compare quasi sempre all'interno di un seno.

Per gli asteroidi è conveniente “filtrare” i numerosi effetti che modificano significativamente le orbite su scale temporali “medio-brevi” ($\lesssim My$). Partendo dagli elementi osculanti e sottraendo le perturbazioni di periodo “breve” ($\sim Ky$) si ottengono gli elementi medi, e successivamente sottraendo da questi le perturbazioni con periodo “medio” ($\sim My$) si ottengono gli *elementi propri*. Teoricamente questi dovrebbero essere costanti anche sul lungo periodo (simulazioni numeriche suggeriscono però di non spingersi oltre a $\sim 100My$) e permettono di rappresentare la distribuzione degli asteroidi limitando gli errori di bias, dovuti agli effetti delle perturbazioni di breve periodo sul quadro osservativo.

Elementi osculanti, forzati e propri

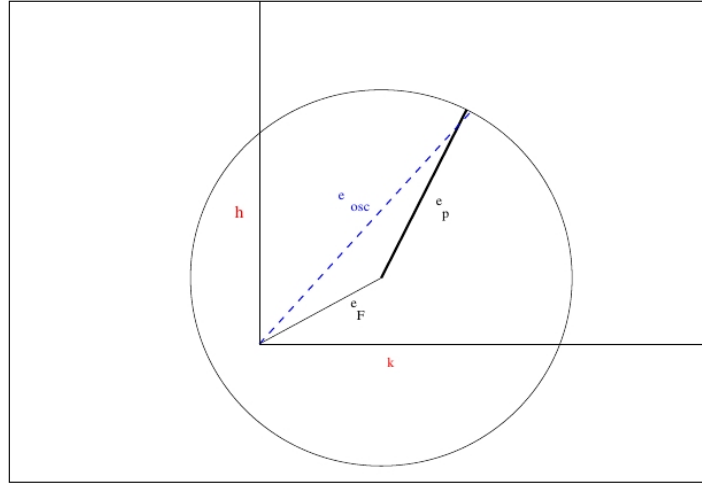


Figura 7: rappresentazione grafica della definizione di *eccentricità propria* e_p : e_{osc} è l'eccentricità dell'orbita osculante mentre e_F è il contributo dovuto alla perturbazione che sommato ad e_p dà l'eccentricità e_{osc} . Immagine presa da [4].

2.1.2 Morfologia della Fascia Principale

Dallo studio della distribuzione degli asteroidi sui piani definiti dagli elementi propri, (a, e) , Fig. (8) e (a, I) , Fig. (9), si osservano alcune caratteristiche peculiari:

1. Si notano addensamenti attorno ad alcuni valori degli elementi propri, interpretabili come *famiglie dinamiche*. Si suppone, cioè, che questi oggetti abbiano una origine comune ed una dispersione nello spazio degli elementi dovuta alla successiva evoluzione dinamica.
2. Esistono fasce, sia sul piano (a, e) che su quello (a, I) estremamente spopolate, osservate per la prima volta verso la metà del XIX secolo da Kirkwood. Queste zone spopolate vengono dette “Gaps di Kirkwood”, e sono associate a risonanze di moto medio con Giove.
3. La distribuzione è “tagliata” ad $a \simeq 2.1A.U.$ interiormente, ad $a \simeq 3.2A.U.$ finisce la cosiddetta “fascia interna” e si osservano pochissimi asteroidi per $e \gtrsim 0.4$

¹⁶cfr. nota 6 a pag.3

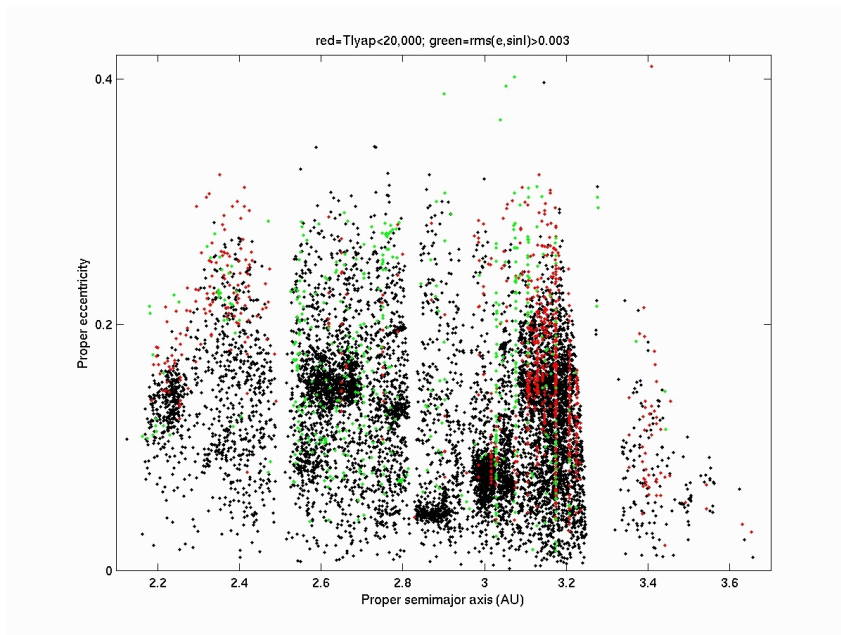


Figura 8: Grafico della distribuzione di asteroidi sul piano (a, e) dove a è il semiasse maggiore proprio ed e l'eccentricità propria. I punti verdi rappresentano asteroidi caratterizzati da moto caotico (piccolo tempo di Lyapunov), e quelli rossi asteroidi con instabilità significative di a e/o e . Il grafico è stato preso da <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys2/> a Marzo 2013.

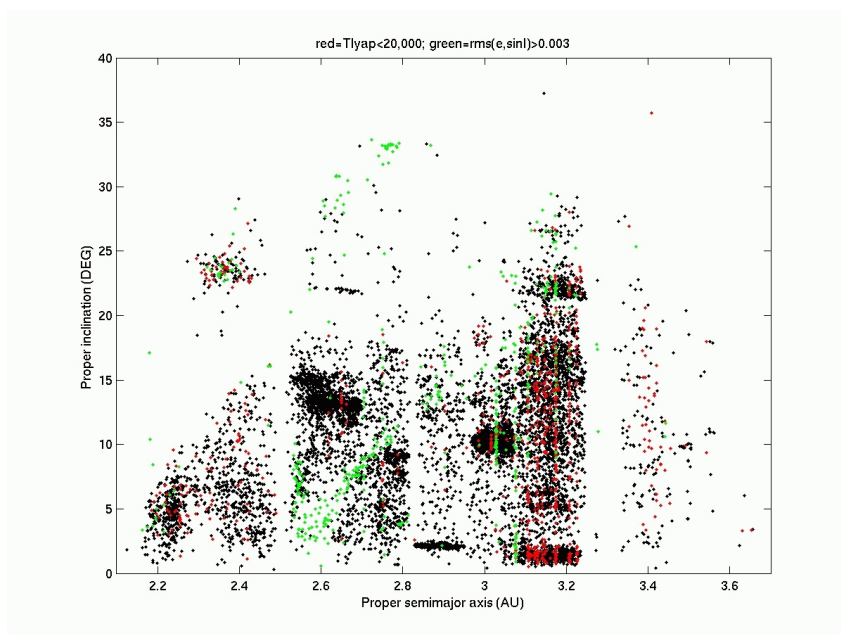


Figura 9: Grafico della distribuzione di asteroidi sul piano (a, I) dove a è il semiasse maggiore proprio ed I l'inclinazione propria del piano dell'orbita rispetto al piano dell'eclittica. I punti verdi rappresentano asteroidi caratterizzati da moto caotico (piccolo tempo di Lyapunov), e quelli rossi asteroidi con instabilità significative di a e/o I . Il grafico è stato preso da <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys2/> a Marzo 2013.

3 Giustificazione teorica della morfologia della Fascia Principale

Nel seguito si vuole analizzare, mediante l'utilizzo degli strumenti sviluppati in Sec. (1), come siano giustificabili sul piano teorico le proprietà 2 e 3 del precedente elenco.

3.1 Formazione dei Gaps di Kirkwood

Per spiegare la formazione dei gaps di Kirkwood, si prende come esempio la risonanza 3:1 con Giove, che corrisponde al gap in $a \simeq 2.5A.U.$, la spiegazione è analoga per tutti gli altri gaps della fascia interna.

La presenza di questo gap può essere spiegata grazie a:

- caos della dinamica dei moti secolari
- incontri ravvicinati con Marte

Per semplicità si considerano coplanari le orbite degli asteroidi e dei pianeti, anche se ellittiche ed in precessione.

L'hamiltoniana di un asteroide sottoposto all'attrazione gravitazionale del Sole e di tutti i pianeti, in unità di misura tali che $GM_\odot = 1$ e $m = 1$ (dove m è la massa dell'asteroide studiato); è:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2a} + \sum_{l=1}^8 \mathcal{H}_l - \sum_{l=1}^8 \frac{M_l}{M_\odot} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_l}{r_l^3} \right) \quad (20)$$

con $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(a)$ posizione dell'asteroide, a il suo semiasse maggiore, considerato come variabile indipendente, e M_l e r_l massa e posizione dell' l -esimo pianeta. Le posizioni si calcolano ponendo il Sole fisso nell'origine. Il primo addendo rappresenta quindi il termine imperturbato. L'ultimo, invece, descrive la perturbazione dovuta ai pianeti. Infine, il termine \mathcal{H}_l è l'hamiltoniana **imperturbata** (si considera, in questa, solo l'attrazione gravitazionale del Sole) dell' l -esimo pianeta, che è stata inserita solo per chiarezza in quanto non dipende dalle variabili relative all'asteroide. Essendo questa integrabile, si può esprimere in funzione delle sole variabili di azione Λ_0 associate alle frequenze di moto medio (n_l), precessione del perielio (g_l) e della linea dei nodi (s_l):

$$\mathcal{H}_l = n_l \Lambda_l + g_l \Lambda_{g_l} + s_l \Lambda_{s_l} \quad (21)$$

L'hamiltoniana in Eq. (20) si può esprimere in funzione degli elementi orbitali dell'asteroide e dei pianeti, in particolare è possibile utilizzare esclusivamente gli elementi propri.

Dato che si vuole studiare la dinamica dei moti secolari, è conveniente mediare il termine perturbativo sul periodo di rivoluzione dei pianeti. Per farlo si usano solitamente le variabili dette *risonanti*, che sono combinazioni lineari a coefficienti interi delle varie frequenze (si veda Eq.(7) in [7]).

Se si considera il caso di una *risonanza di moto medio* con un pianeta, effettuando la media sulle orbite di rivoluzione planetaria, si ottiene¹⁷:

$$\mathcal{H}^{2BR} = -\frac{1}{2a} + \frac{k_j}{k} n_j \sqrt{a} + \sum_{l=1}^8 (g_l \Lambda_{g_l} + s_l \Lambda_{s_l}) - \sum_{l=1}^8 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_l}{M_\odot} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_l}{r_l^3} \right) d\lambda_l + O\left(\left(\frac{M_G}{M_\odot}\right)^2\right) \quad (22)$$

dove j è l'indice (fissato, non si somma) del pianeta con cui si ha la risonanza, ed n_j il suo moto medio.

Nel caso della risonanza 3:1 con Giove $j \rightarrow G$ e si ha $k_G/k = 1/3$.

Per scrivere \mathcal{H}^{2BR} nella forma di Eq. (1) e poter usare una trattazione perturbativa si usa:

$$\mathcal{H}^{2BR} = \mathcal{H}^C - \mathcal{F} \quad (23)$$

dove:

$$\mathcal{H}^C = -\frac{k_G^2}{2a(k_G + k)^2} + n_G \frac{\sqrt{a}}{k} (k_G + k) - \sum_{l=1}^8 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_l}{M_\odot} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_l|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_l}{r_l^3} \right) d\lambda_l \quad (24)$$

¹⁷l'apice *2BR* sta per "two body resonance". La presenza di eventuali termini del secondo ordine nel rapporto $M_G/M_\odot \sim 10^{-6}$ è dovuta al fatto che, per avere una trattazione realistica, si devono usare gli elementi osculanti dei pianeti, e per esprimerli in funzione degli elementi propri si ricorre a serie di potenze in cui compaiono i rapporti tra le masse planetarie e quella solare

è l'hamiltoniana che si avrebbe se l'orbita di Giove fosse circolare, e $\mathcal{F} \stackrel{def}{=} \mathcal{H}^{2BR} - \mathcal{H}^C \equiv \mathcal{H}_I$ è il termine perturbativo, che sarà proporzionale all'eccentricità dell'orbita di Giove $e_G \simeq 0.05$.

Ovviamente affinché Eq. (23) sia della forma Eq. (1) bisogna dimostrare che \mathcal{H}^C è effettivamente integrabile, che non è scontato essendo l'hamiltoniana di un problema di tre corpi di cui due risonanti. In particolare, la presenza di una risonanza causa una discontinuità topologica nello spazio delle fasi. Le approssimazioni introdotte (Sole fissato nell'origine, orbite coplanari, media sul periodo di rivoluzione di Giove considerato in orbita circolare) permettono di trovare set diversi di variabili azione-angolo per ogni dominio in cui viene suddiviso lo spazio delle fasi dalla risonanza. In particolare ci interessa studiare la regione di librazione della variabile associata alla precessione del perielio (Ψ_ν nel seguito). La forma esplicita del cambio di variabili necessario può essere trovata in [7].

Si ottiene così, da \mathcal{H}^{2BR} , l'hamiltoniana della dinamica secolare per la risonanza di moto medio 3:1 con Giove:

$$\mathcal{H}^{sec} = \sum_{j=1}^8 g_j \Lambda_{g_j} + \mathcal{H}^C(J, J_\nu) + \mathcal{F}(J, J_\nu, \Psi_\nu, \varpi) \quad (25)$$

dove \mathcal{H}^C dipende solamente dalle azioni J e J_ν associate rispettivamente alla variabile "veloce" (ottenuta come combinazione lineare a coefficienti interi di λ e λ_G), e alla variabile Ψ_ν . Si noti che nell'approssimazione di orbite coplanari la linea dei nodi degenera nell'intero piano dell'orbita e quindi le variabili che compongono il vettore ϖ descrivono sostanzialmente la posizione del perielio dei pianeti.

L'hamiltoniana può essere ulteriormente semplificata sfruttando la *sovrapposizione tra le regioni associate a risonanze con i perielii di Giove e Saturno*: è sufficiente considerare solamente il contributo di questi due pianeti, e solo le armoniche della perturbazione con frequenza orbitale $\Psi_\nu + \varpi_G$ e $\Psi_\nu + \varpi_S$. Si ottiene:

$$\mathcal{H}^{G,S} = g_G \Lambda_{g_G} + g_S \Lambda_{g_S} + \mathcal{H}^C(J, J_\nu) + \bar{\mathcal{F}}^{G,S}(J, J_\nu, \Psi_\nu + \varpi_G, \Psi_\nu + \varpi_S) \quad (26)$$

Questa hamiltoniana *non* è integrabile, ed è quindi necessario ricorrere a simulazioni numeriche per dedurre la dinamica che descrive. Le soluzioni possono essere rappresentate su una sezione di Poincaré sul piano $(\Psi_\nu + \varpi_G, J_\nu)$ con il vincolo arbitrario $\Psi_\nu + \varpi_S = 0$, si veda Fig. (10).

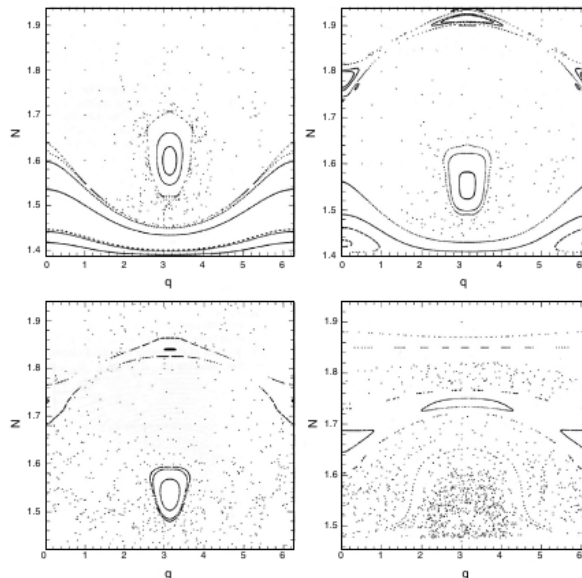


Figura 10: Sezione di Poincaré delle soluzioni del moto del sistema Eq. (26). I quattro grafici sono disposti in ordine crescente di J . Valgono: $q = \Psi_\nu + \varpi_G$; $N = J_\nu = 0.69(3 - \sqrt{1 - e^2})$. La figura è la Fig.(3) di [7].

Su ogni grafico di Fig. (10), il valore minimo che può assumere $N \equiv J_\nu$ corrisponde ad una “separatrice” tra una regione di *librazione* e una di *circolazione* della risonanza 3:1 con Giove. Le orbite che escono dal bordo inferiore quindi tenderanno ad avere un comportamento caotico: dall’analogia risonanza-pendolo ci si aspetta che entrino nelle equazioni del moto dei termini non lineari.

Si vede quindi che la maggior parte delle orbite risulta fortemente caotica, fatta eccezione per alcune, che però incrociano periodicamente l’orbita di Marte (ogni qual volta giungono a $e \simeq 0.3$ ¹⁸, ovvero $N = J_\nu \simeq 1.4$). Gli incontri ravvicinati con Marte causano una variazione impulsiva di e e/o a , che fa saltare da un toro invariante (della dinamica secolare) all’altro, fino a che l’orbita non entra nel “mare caotico”. L’evoluzione caotica porta successivamente, su un tempo scala pari al tempo di Lyapunov, ad eccentricità $e \sim 1$, che si traducono in una espulsione dal sistema solare, una caduta sul Sole o un trasferimento nella fascia dei NEO. Questa combinazione di dominanza di orbite caotiche e incontri con Marte spiega quindi efficacemente il depopolamento della fascia $a \simeq 2.5A.U.$ e l’apertura di un gap di Kirkwood nella regione corrispondente.

3.2 Limiti della distribuzione di asteroidi sul piano (a, e)

Come già osservato, la distribuzione di asteroidi è confinata in una regione ben precisa del piano (a, e) . I limiti di questa regione possono essere compresi ancora una volta grazie ai fenomeni di *risonanza secolare* e *sovrapposizione tra le risonanze*.

$e \lesssim 0.4$: La maggior parte degli asteroidi è caratterizzata da una eccentricità ben minore di 0.4. Questo fatto può essere spiegato sfruttando il criterio di Chirikov. Infatti le orbite con grandi eccentricità si avvicinano periodicamente ai pianeti, intorno ai quali sono numerose le sovrapposizioni tra le regioni associate a risonanze di moto medio. Di conseguenza è facile che un asteroide con elevata eccentricità entri in una catena di risonanze che lo porta ad allontanarsi caoticamente dalla fascia principale (molti cadranno sul Sole, verranno espulsi dal sistema solare oppure finiranno tra i NEO).

$a \lesssim 3.2A.U.$: In corrispondenza del valore limite del semiasse maggiore si trova la risonanza di moto medio 2:1 con Giove. Si potrebbe quindi ripetere il ragionamento fatto per i Gaps di Kirkwood, tenendo conto della risonanza secolare con la precessione del perielio di Giove. In questo caso però bisogna considerare la seguente complicazione: le orbite con piccola eccentricità sono separate da quelle con grande eccentricità da tori KAM non risonanti, e quindi la dinamica secolare non può spiegare l’assenza di asteroidi per $a \gtrsim 3.2A.U.$ Si osserva che il tempo di Lyapunov per asteroidi con $a \gtrsim 3.2A.U.$ risulta breve ($\tau_{lyap} \sim 10^{3.5} - 10^5$ anni) rispetto all’età del sistema solare. Il depopolamento per a grandi non è quindi dovuto ad una interazione tra risonanze con i moti planetari, ma dalla caoticità intrinseca e su scala temporale breve della regione dello spazio delle fasi corrispondente. Simulazioni numeriche mostrano che una espulsione dei corpi con semiasse maggiori di $3.2A.U.$ può avvenire in tempi inferiori ai 4 miliardi di anni.

$a \gtrsim 2.1A.U.$: Il limite inferiore sul semiasse maggiore è determinato dalla combinazione delle risonanze di moto medio con Marte ($a_{Marte} = 1.52A.U.$), e la risonanza secolare ν_6 con la precessione del perielio di Saturno. Come è ormai noto, la presenza della sovrapposizione tra due risonanze porta alla possibilità di diffusione caotica con il modello di Chirikov. È da notare che la regione associata alla risonanza ν_6 è molto estesa e taglia una linea diagonale dal punto $(a, e)=(2,0.2)$ ad $(a, e)=(3.2,0.5)$ e la maggior parte degli asteroidi si trova al di sotto di questa linea.

4 Conclusioni

Sicuramente la Fascia Principale degli Asteroidi è una fonte di esempi di moto caotico, e risonanze di ogni genere. La struttura matematica su cui giace l’analisi di questi fenomeni non può ancora dirsi completa, tuttavia sembra ormai essere assodato il ruolo dei fenomeni caotici e delle risonanze nel determinare la struttura della Fascia degli Asteroidi. Sfruttando infatti questi strumenti si riesce a riprodurre con ottima precisione la presenza dei Gaps di Kirkwood, inoltre questi permettono anche di spiegare gli estremi della

¹⁸si noti che questa stima riguarda l’eccentricità propria, e non l’eccentricità dell’orbita osculante

fascia in (a, e) . Infine, la diffusione caotica è considerata una delle principali vie di rifornimento di NEO e Mars Crossers¹⁹ dalla fascia degli asteroidi: i corpi che subiscono una evoluzione orbitale caotica possono cadere direttamente nel Sole, oppure avvicinarsi ad altri pianeti, fino a costituire un potenziale rischio di impatto. Lo studio dei fenomeni caotici nella fascia degli asteroidi è quindi di grande interesse, sia dal punto di vista matematico-formale, che da quello fisico osservativo ed interpretativo, tanto da essere uno dei numerosi esempi di multidisciplinarietà dell'astrofisica moderna.

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Meccanica classica - 2 edizione italiana*, Zanichelli, 2005
- [2] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1994
- [3] V.I. Arnol'd, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 2004
- [4] P. Paolicchi, *Sistemi Planetari - Lezioni del corso tenuto all'Università di Pisa*, <http://www.df.unipi.it/~paolic/dispen2.html>
- [5] B. Bertotti, P. Farinella, D. Vokrouhlický, *Physics of the solar system*, Kluwer Academic Publishers, 2003
- [6] A. Morbidelli, *Resonant structures and diffusion in hamiltonian systems in Chaos and Diffusion in hamiltonian Systems*, Benet-Frosble, 1995
- [7] D.Nesvorný, S. Ferraz-Mello, M. Holman, A. Morbidelli, *Regular and Chaotic Dynamics in the Mean-Motion Resonances: Implications for the Structure and Evolution of the Asteroid Belt in Asteroids III*, University of Arizona Press, 2002
- [8] M. Moons, A. Morbidelli, *Secular resonances in Mean Motion Commensurabilities: the 4/1, 3/1, 5/2, 7/3 cases*, Icarus, 1995

¹⁹la necessità dell'esistenza di meccanismi di rifornimento è dovuta al fatto che i NEO hanno tempi caratteristici di vita molto inferiori all'età del sistema solare, e devono quindi essere una popolazione transiente costantemente rifornita per poter essere presente ancora oggi.