

# Le risonanze nel sistema solare: l'accoppiamento spin-orbita di Mercurio.

Andrea Caleo

Febbraio 2012

## 1 Le risonanze nel sistema solare.

Nell'ambito della dinamica del sistema solare, si dice che due o più corpi sono in risonanza quando vi è una relazione semplice tra le frequenze caratteristiche che ne descrivono il moto.

Una trattazione completa del fenomeno delle risonanze nel sistema solare sarebbe molto complessa; diversi aspetti del problema sono trattati in [1] e [2]. In questa relazione ci si limita a descrivere alcuni esempi in modo fenomenologico in questa sezione, ed un procedimento che permette di comprendere un caso specifico, quello di accoppiamento spin-orbita nei sistemi Terra-Luna e Sole-Mercurio, nella sezione successiva.

### 1.1 Risonanze di moto medio.

Le risonanze di moto medio sono quelle che coinvolgono solamente i periodi orbitali dei corpi che partecipano alla risonanza. Le risonanze di moto medio più importanti sono legate all'effetto di un pianeta sui corpi minori del sistema solare. Tra questo tipo di risonanze si annoverano:

- La risonanza tra il periodo di Giove e quello di alcuni asteroidi; l'effetto del pianeta sugli asteroidi è di destabilizzarne l'orbita e svuotare la fascia asteroidale in corrispondenza di determinati valori del semiasse maggiore che corrispondono alla risonanza. La figura 1 riporta la distribuzione di asteroidi all'interno della main belt ed evidenzia a quali risonanze corrispondano le zone di svuotamento, chiamate Kirkwood gaps.
- La risonanza 3:2 tra i periodi di Nettuno e Plutone. Grazie a questo effetto, anche se le orbite dei due corpi risultano molto vicine quando Plutone è al perielio (e si intersecherebbero se non fossero inclinate), i due corpi non sono mai molto vicini tra loro.
- La risonanza 1:1 tra i periodi di Giove e degli asteroidi noti come greci e troiani. Questi asteroidi si trovano rispettivamente vicino ai punti  $L_4$  e  $L_5$  del sistema Sole-Giove, ovvero ai punti appartenenti al piano dell'eclittica che formano un triangolo equilatero con Giove ed il Sole.

### 1.2 Altri tipi di risonanze.

Le frequenze caratteristiche dei corpi che si trovano nel sistema solare non sono ovviamente solo quelle di moto medio. Tra le altre risonanze si annoverano:

- Gli accoppiamenti spin-orbita tra due corpi. L'esempio più noto è quello del sistema Terra-Luna: la Luna rivolge sempre la stessa faccia alla Terra, e si trova quindi in una risonanza

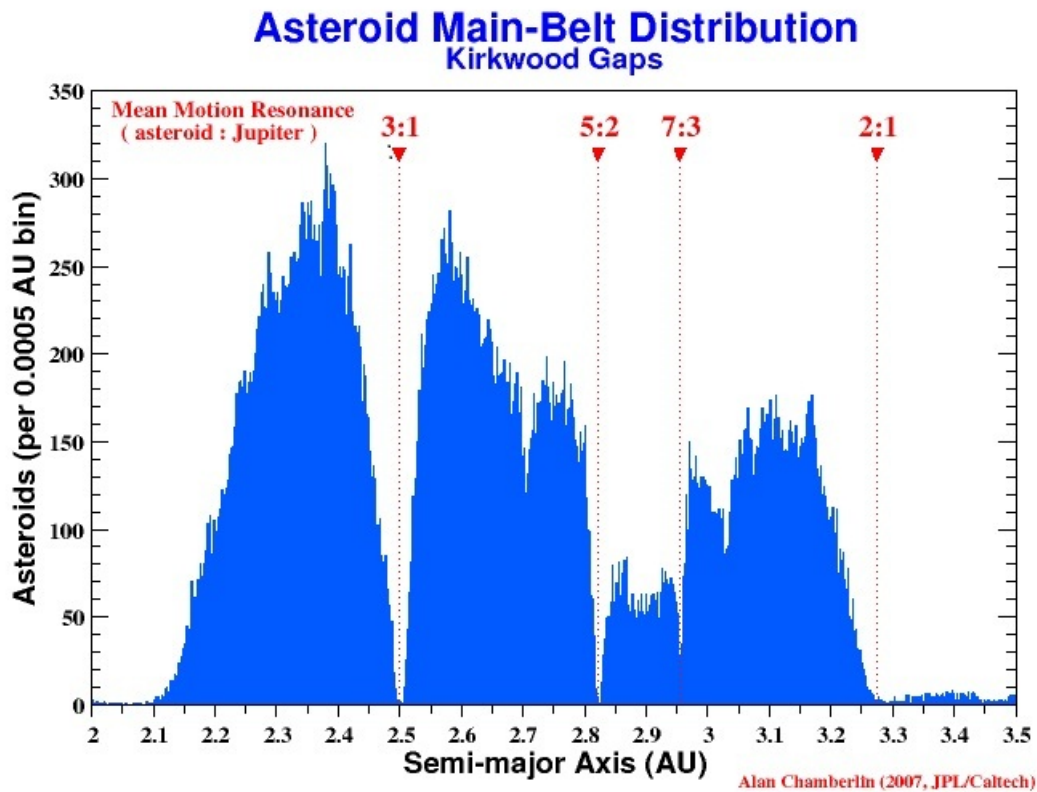


Figura 1: Distribuzione di asteroidi all'interno della main belt. Sono indicate le risonanze con Giove; la notazione  $m:n$  indica che, quando l'asteroide ha percorso l'orbita  $m$  volte, il pianeta ha percorso la sua  $n$  volte. L'immagine è tratta da [http://ssd.jpl.nasa.gov/?histo\\_a\\_ast](http://ssd.jpl.nasa.gov/?histo_a_ast).

con  $w_{rot} = n$ . Questo caso e quello del sistema Sole-Mercurio (in cui la velocità angolare di rotazione del pianeta rispetta la relazione  $w_{rot} = \frac{3}{2}n$ ), sono trattati nel seguito.

Una risonanza spin-orbita particolare è quella di Plutone ed il suo satellite Caronte, che sono giunti completamente all'equilibrio: entrambi i corpi si mostrano sempre la stessa faccia, e sono quindi in una situazione di risonanza con  $w_{Plutone} = w_{Caronte} = n$ .

- In alcuni casi, è necessario tenere conto del fatto che il corpo che causa la perturbazione (ad esempio un satellite di un pianeta), il cui moto potrebbe essere descritto in prima approssimazione come un'orbita circolare percorsa a velocità uniforme, è a sua volta perturbato da una serie di altri corpi (ad esempio, gli altri satelliti) ed ha quindi una legge oraria che non è caratterizzata solamente dal moto medio  $n$ , ma anche dalle frequenze  $k$  e  $\nu$  con cui oscillano la distanza dal centro e l'inclinazione dell'orbita. In questi casi sono presenti risonanze che coinvolgono anche le frequenze  $k$  (risonanze di Lindblad) e  $\nu$  (risonanze verticali) del corpo perturbatore. Una trattazione dettagliata di questo tipo di risonanza è complessa; si può vedere [2] per ulteriori dettagli.

Queste risonanze hanno un ruolo rilevante nel definire la forma degli anelli planetari di Saturno e di Urano, e devono essere considerate quando se ne vuole descrivere l'evoluzione dinamica: il moto delle particelle che compongono gli anelli è disturbato dalla presenza dei satelliti, che hanno l'effetto di impedire l'allargamento dell'anello che risulterebbe naturale.

## 2 Il caso dell'accoppiamento dinamico spin-orbita.

In questa sezione si mostra un procedimento che permette di spiegare la stabilità di risonanze spin-orbita nella forma  $w_{rot} = pn$  dove  $p$  è un numero intero o semintero e  $n$  il moto medio. Due risonanze di questo tipo nel sistema solare sono quelle dei sistemi Terra-Luna (per la Luna,  $w_{rot} = n$ ) e Sole-Mercurio (per Mercurio,  $w_{rot} = \frac{3}{2}n$ ).

Si mostrerà inoltre che le risonanze con  $p = \pm 1$  sono favorite nel caso di eccentricità molto piccola, mentre le altre diventano possibili al crescere di  $e$ . A questo scopo, si ricaverà il momento torcente agente sul corpo celeste in funzione della sua posizione lungo l'orbita, svolgendo i calcoli al secondo ordine nell'eccentricità.

La maggior parte della trattazione è presente in [2].

### 2.1 La soluzione del problema dei due corpi.

L'enunciato e la soluzione del problema dei due corpi saranno considerati noti in questa discussione. Se ne può trovare una presentazione in [2] ed in molti testi di meccanica celeste. In questa sede ci si limita a richiamare alcuni risultati fondamentali che saranno usati nel seguito. Poiché nell'applicazione principale che si farà nel seguito (la rivoluzione di Mercurio attorno al Sole) queste ipotesi saranno corrette, ci si limiterà al caso in cui un corpo abbia massa molto minore dell'altro, e si indicherà il corpo leggero come pianeta identificando il corpo più massivo con il Sole.

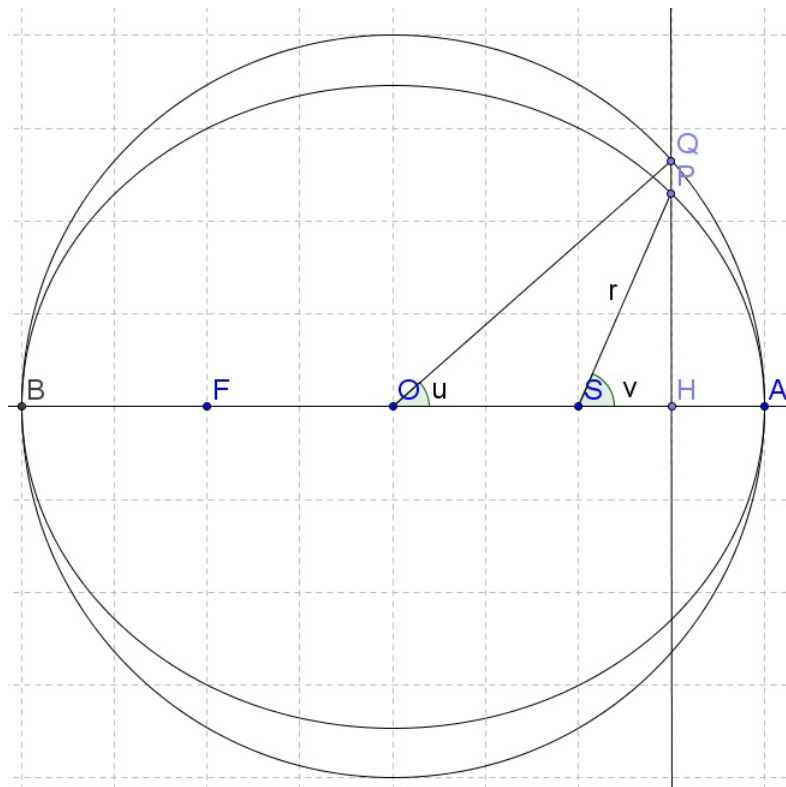


Figura 2: Orbita percorsa da un corpo in orbita attorno al Sole. Il Sole è nel fuoco S; la posizione del corpo è rappresentata dal punto P; il perielio e l'afelio sono rappresentati rispettivamente dai punti A e B. Questa immagine e tutte le successive sono state prodotte con il software Geogebra.

La figura 2 rappresenta l'ellisse percorsa dal pianeta nel suo moto attorno al Sole; l'eccentricità dell'orbita di Mercurio è 0.21, mentre per l'ellisse in figura si è scelta un'eccentricità pari a 0.5

per rendere più evidente il modo in cui le proprietà geometriche dell'orbita si discostano dal caso circolare. Gli angoli  $A\hat{S}P$  e  $A\hat{O}Q$  sono rispettivamente l'anomalia vera  $v$  e l'anomalia eccentrica  $u$ . La forma dell'orbita in coordinate polari è data da:

$$r(v) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (1)$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'ellisse, ed  $e$  la sua eccentricità.

L'anomalia media  $\varphi$  è un angolo che non ha un significato geometrico immediato, ma è utile per determinare la posizione del pianeta in funzione del tempo. È definita dal fatto che  $\varphi = 0$  quando  $v = 0$ , e che valga costantemente  $\dot{\varphi} = n$ , dove  $n$  è il moto medio del pianeta.

Le seguenti relazioni che legano  $v$ ,  $u$ ,  $\varphi$ ,  $a$  ed  $r$  saranno utili nel seguito:

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (2)$$

$$\tan(u/2) = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan(v/2) \quad (3)$$

$$\varphi = u - e \sin u \quad (4)$$

La 4 è nota come equazione di Keplero.

## 2.2 Espansioni ellittiche.

Nel seguito saranno utili le quantità  $(\frac{a}{r})^3$ ,  $\cos(2v)$  e  $\sin(2v)$  espresse come funzioni di  $\varphi$ . Queste relazioni non esistono in forma chiusa (come si può intuire notando che l'equazione 4 non è risolvibile analiticamente se  $e \neq 0$ ), ma sono esprimibili come serie infinite. Il procedimento è complesso e non sarà discusso qui; se ne può trovare una trattazione in [2].

In questa discussione ci si limita a presentare un metodo concettualmente semplice per ricavare tali relazioni all'n-esimo ordine nell'eccentricità, e si scriveranno i risultati solo fino al secondo ordine, che sarà sufficiente per le applicazioni successive.

Si può ricavare la soluzione dell'equazione di Keplero 4 all'n-esimo ordine tramite il seguente procedimento iterativo. Dalla 4 si ha:

$$u = \varphi + e \sin u \quad (5)$$

Si pone  $u_0 = \varphi$  e si usa questa relazione per ricavare  $u_n$  in modo che sia:

$$u_n = \varphi + e \sin u_{n-1} \quad (6)$$

Si ottiene per i primi ordini:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi + e \sin u_0 = \varphi + e \sin \varphi \\ u_2 &= \varphi + e \sin u_1 = \varphi + e \sin(\varphi + e \sin \varphi) \approx \varphi + e \sin \varphi + e^2 \cos \varphi \sin \varphi \approx \\ &\approx \varphi + e \sin \varphi + e^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

Conoscendo l'espressione di  $u$  all'n-esimo ordine, è possibile usare la 2 per ricavare  $(\frac{a}{r})^3$  e quindi la sua espressione all'ordine desiderato.

Invertendo la 3, è possibile ricavare l'espressione di  $v$  all'n-esimo ordine. Usando poi le serie di Taylor delle funzioni trigonometriche si ottengono  $\cos(2v)$  e  $\sin(2v)$ .

Poichè le funzioni  $\cos(2v)$  e  $\sin(2v)$  sono rispettivamente pari e dispari in  $\varphi$  e periodiche, le loro espressioni in serie di Fourier nella base  $(\cos(k\varphi), \sin(k\varphi))_{k \in \mathbb{N}}$  contengono rispettivamente solo termini  $\cos(k\varphi)$  e  $\sin(k\varphi)$ . Nel seguito sarà utile esprimere così queste quantità.

I calcoli necessari per il procedimento descritto sono molto complessi, anche fermandosi al secondo ordine. I risultati riportati qui di seguito sono stati ottenuti tramite il programma Mathematica; si è fatto uso della funzione TrigReduce per imporre al software di esprimere i risultati nella forma desiderata. Si ha:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \approx 1 + 3 \cos(\varphi)e + \frac{3}{2}(1 + 3 \cos(2\varphi))e^2 \quad (7)$$

$$\cos(2v) \approx \cos(2\varphi) + 2(\cos(3\varphi) - \cos \varphi)e + \frac{1}{4}(13 \cos(4\varphi) - 16 \cos(2\varphi) + 3)e^2 \quad (8)$$

$$\sin(2v) \approx \sin(2\varphi) + 2(\sin(3\varphi) - \sin \varphi)e + \frac{1}{4}(13 \sin(4\varphi) - 16 \sin(2\varphi))e^2 \quad (9)$$

### 2.3 Calcolo del momento torcente agente sul pianeta.

In questa sezione si calcola il momento torcente agente sul pianeta in funzione della sua posizione, indicata dall'anomalia vera  $v$ . Si utilizza un sistema di riferimento avente come assi  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  gli assi principali del corpo, supponendo che il corpo ruoti attorno all'asse  $\hat{z}$  con velocità angolare  $w_z \equiv w$  e che il moto del Sole attorno al pianeta si svolga solo sul piano  $xy$ . I calcoli seguenti saranno quindi svolti nell'approssimazione che l'asse di spin sia perpendicolare al piano dell'orbita (in effetti l'inclinazione dell'asse di rotazione di Mercurio è molto piccola:  $i \approx (2.1 \pm 0.1)^\circ$ ; si veda [3]).

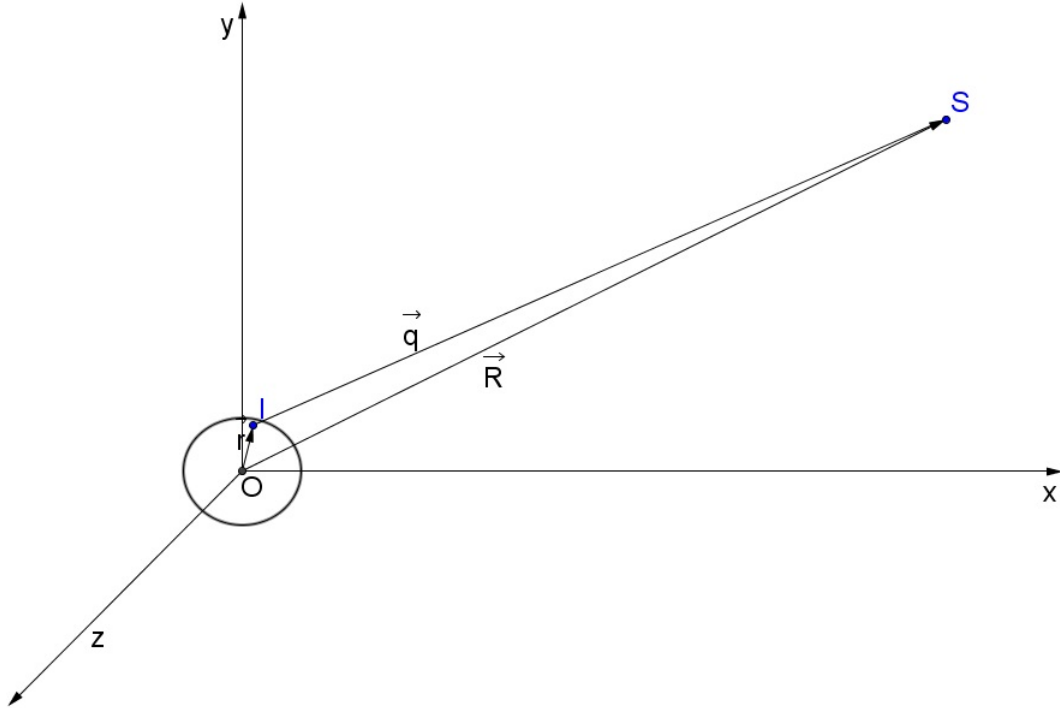


Figura 3: Sistema di riferimento centrato nel pianeta, con gli assi diretti lungo gli assi principali, in cui il Sole si muove solo nel piano  $xy$  e lo spin del pianeta è lungo l'asse  $z$ .

La figura 3 mostra il sistema di riferimento utilizzato e sarà utile nel calcolo del momento torcente. La posizione del Sole in questo sistema sarà indicata con  $\vec{R} = (X, Y, Z)$ . Si indicheranno

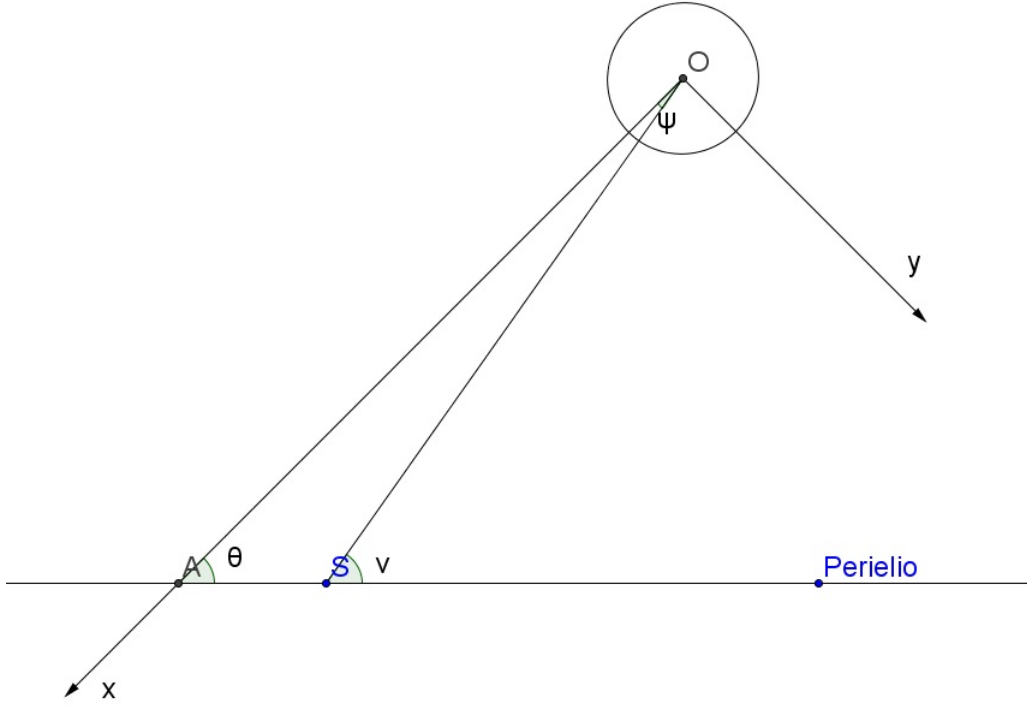


Figura 4: La retta tra il Sole ed il perielio è ferma in un sistema di riferimento inerziale centrato nella stella. Perciò l'angolo  $\theta$  tra l'asse x del sistema di riferimento centrato sul pianeta e tale retta rappresenta direttamente la rotazione del corpo.

con  $A$ ,  $B$  e  $C$  i momenti di inerzia del pianeta rispetto ai tre assi e si userà l'approssimazione, certamente valida,  $|\vec{r}| \ll |\vec{R}|$  per gli elementi di massa interni al pianeta.

La forza che agisce su un elemento di massa  $dm$  che si trova nella posizione  $\vec{r} = (x, y, z)$  è:

$$d\vec{F} = \frac{GM_{\odot}dm}{q^3} \vec{q} = GM_{\odot}dm \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} = \frac{GM_{\odot}dm}{R^3} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{(1 + (\frac{r}{R})^2 - \frac{2}{R^2} \vec{r} \cdot \vec{R})^{3/2}}$$

Approssimando al primo ordine in  $|\vec{r}|/|\vec{R}|$  e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$d\vec{F} = \frac{GM_{\odot}dm}{R^3} (\vec{R} + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{r}) \quad (10)$$

Il momento torcente si calcola come  $\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$ . Usando la 10 e notando che  $\int \vec{r} dm = 0$  perchè l'origine è nel centro di massa, si ricava:

$$\vec{N} = \frac{3GM_{\odot}}{R^5} \int (\vec{r} \cdot \vec{R}) \vec{r} \times \vec{R} dm$$

Riducendosi alle singole componenti, usando le espressioni  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{R} = (X, Y, Z)$  e svolgendo alcuni calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{3GM_{\odot}}{R^5} \int (xX + yY + zZ)(yZ - zY) dm = \frac{3GM_{\odot}}{R^5} \int YZ(y^2 - z^2) dm = \\ &= \frac{3GM_{\odot}}{R^5} \int YZ(x^2 + y^2 - (x^2 + z^2)) dm \end{aligned}$$

dove si è usato nuovamente che l'origine è nel centro di massa per eliminare alcuni termini. Notando che  $\int x^2 + y^2 dm = C$  e  $\int x^2 + z^2 dm = B$  si ha:

$$N_x = \frac{3GM_\odot YZ}{R^5}(C - B) \quad (11)$$

E si ricava analogamente:

$$N_y = \frac{3GM_\odot ZX}{R^5}(A - C) \quad (12)$$

$$N_z = \frac{3GM_\odot XY}{R^5}(B - A) \quad (13)$$

## 2.4 Equazione per l'evoluzione della velocità di rotazione.

Il moto del pianeta nel sistema di riferimento inerziale che coincide istantaneamente con quello degli assi principali è descritto dalle equazioni di Eulero; essendo, nel caso in esame,  $w_x = w_y = 0$ , l'unica equazione non banale risulta:

$$C\dot{w} = N_z \quad (14)$$

Da cui si ricava:

$$\dot{w} + \frac{3GM_\odot XY}{R^5} \frac{A - B}{C} = 0 \quad (15)$$

Si useranno gli angoli rappresentati nella figura 4 per esprimere quest'equazione in una forma più utile per descrivere la rotazione del pianeta. L'angolo  $\theta$  è quello tra l'asse  $\hat{x}$ , che è un asse principale del corpo, e la retta passante per il perielio ed il Sole, che è fissa in un sistema inerziale centrato sulla stella, ed è quindi tale che  $w = \dot{\theta}$ . L'angolo  $\psi = v - \theta$  è utile per esprimere le coordinate del Sole nel sistema di riferimento, essendo  $X = R \cos \psi$  e  $Y = R \sin \psi$ . Si ricava quindi:

$$\ddot{\theta} + \frac{3GM_\odot R^2}{R^5} \frac{A - B}{C} \sin \psi \cos \psi = 0$$

da cui:

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} \frac{A - B}{C} \sin(2(v - \theta)) = 0 \quad (16)$$

Si ha una risonanza spin-orbita se  $\dot{\theta} = pn$  dove  $p$  è un numero razionale semplice e  $n$  il moto medio. Essendo  $n = \dot{\varphi}$ , si definisce l'angolo  $\gamma = \theta - p\varphi$  e nel seguito si sarà interessati al caso in cui  $\gamma$  rimane approssimativamente costante nel tempo. Per il momento si ammetterà che  $p$  possa assumere qualsiasi valore.

Da  $\gamma = \theta - p\varphi$  si ottiene  $\theta = \gamma + p\varphi$  e  $\ddot{\theta} = \ddot{\gamma}$ . Sostituendo nella 16 si ha:

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} \frac{B - A}{C} \sin(2\gamma + 2p\varphi - 2v) = 0 \quad (17)$$

Usando la terza legge di Keplero  $n^2 a^3 \approx GM_\odot$  si ottiene:

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2} n^2 \frac{B - A}{C} \left(\frac{a}{R}\right)^3 \sin(2\gamma + 2p\varphi - 2v) = 0 \quad (18)$$

Tramite le note formule trigonometriche di addizione si ricava:

$$\begin{aligned} & \sin(2\gamma + 2p\varphi - 2v) = \\ & = \sin(2\gamma)(\cos(2p\varphi) \cos(2v) + \sin(2p\varphi) \sin(2v)) + \cos(2\gamma)(\sin(2p\varphi) \cos(2v) - \cos(2p\varphi) \sin(2v)) \end{aligned}$$

È utile perciò definire le quattro quantità:

$$S_1 = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \cos(2p\varphi) \cos(2v) \quad (19)$$

$$S_2 = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \sin(2p\varphi) \sin(2v) \quad (20)$$

$$S_3 = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \sin(2p\varphi) \cos(2v) \quad (21)$$

$$S_4 = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \cos(2p\varphi) \sin(2v) \quad (22)$$

in modo che la 18 si possa esprimere come:

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \frac{B-A}{C} (\sin(2\gamma)(S_1 + S_2) + \cos(2\gamma)(S_3 - S_4)) = 0 \quad (23)$$

Fino a questo punto non sono state introdotte approssimazioni. Ci si limita adesso a calcolare  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  al secondo ordine nell'eccentricità; a tale scopo si usa nuovamente il software Mathematica sfruttando le espressioni 7, 8 e 9 ricavate in precedenza e la funzione TrigReduce. Il risultato, dopo aver raccolto i termini relativi ai vari ordini, è:

$$\begin{aligned} S_1 \approx & \frac{1}{2}(\cos(2(1+p)\varphi) + \cos(2(1-p)\varphi)) + \\ & \frac{1}{4}(7\cos((3+2p)\varphi) + 7\cos((3-2p)\varphi) - \cos((1+2p)\varphi) - \cos((1-2p)\varphi))e + \\ & \frac{1}{4}(17\cos(2(2+p)\varphi) + 17\cos(2(2-p)\varphi) - 5\cos(2(1+p)\varphi) - 5\cos(2(1-p)\varphi))e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 \approx & \frac{1}{2}(-\cos(2(1+p)\varphi) + \cos(2(1-p)\varphi)) + \\ & \frac{1}{4}(-7\cos((3+2p)\varphi) + 7\cos((3-2p)\varphi) + \cos((1+2p)\varphi) - \cos((1-2p)\varphi))e + \\ & \frac{1}{4}(-17\cos(2(2+p)\varphi) + 17\cos(2(2-p)\varphi) + 5\cos(2(1+p)\varphi) - 5\cos(2(1-p)\varphi))e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 \approx & \frac{1}{2}(\sin(2(1+p)\varphi) - \sin(2(1-p)\varphi)) + \\ & \frac{1}{4}(7\sin((3+2p)\varphi) - 7\sin((3-2p)\varphi) - \sin((1+2p)\varphi) + \sin((1-2p)\varphi))e + \\ & \frac{1}{4}(17\sin(2(2+p)\varphi) - 17\sin(2(2-p)\varphi) - 5\sin(2(1+p)\varphi) + 5\sin(2(1-p)\varphi))e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 \approx & \frac{1}{2}(\sin(2(1+p)\varphi) + \sin(2(1-p)\varphi)) + \\ & \frac{1}{4}(7\sin((3+2p)\varphi) + 7\sin((3-2p)\varphi) - \sin((1+2p)\varphi) - \sin((1-2p)\varphi))e + \\ & \frac{1}{4}(17\sin(2(2+p)\varphi) + 17\sin(2(2-p)\varphi) - 5\sin(2(1+p)\varphi) - 5\sin(2(1-p)\varphi))e^2 \end{aligned}$$



## 2.5 Evoluzione della velocità di rotazione nel caso risonante.

Essendo interessati a risonanze in cui l'angolo  $\gamma$  risulti stabilizzato su un valore approssimativamente costante quando si media su molti periodi, si supponrà che sia  $\dot{\gamma} = \dot{\theta} - pn \ll n$  anche in un singolo periodo e si può quindi mediare la 23 nel tempo:

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2 \frac{B-A}{C} (\sin(2\gamma)(\bar{S}_1 + \bar{S}_2) + \cos(2\gamma)(\bar{S}_3 - \bar{S}_4)) = 0 \quad (24)$$

dove  $\bar{S}_i = \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} S_i(\varphi) d\varphi$  (con  $k$  intero; la media è stata eseguita su  $k$  periodi), e adesso  $\gamma$  rappresenta il valore mediato e non quello istantaneo.

Notando adesso che i termini  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$ , le cui espressioni sono riportate sopra, sono somma di termini nella forma  $\cos(\alpha\varphi)$  e  $\sin(\beta\varphi)$  dove i vari coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  dipendono da  $p$ , è evidente che la media di tali termini su molti periodi risulterà nulla, tranne che nei casi in cui l'argomento di una funzione coseno sia nullo. Quando si ha  $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = \bar{S}_3 = \bar{S}_4 = 0$ , l'equazione 24 implica che  $\dot{\gamma} = \dot{\theta} - pn$  è costante e la differenza tra  $\theta$  e  $p\varphi$  è destinata a crescere indefinitamente nel tempo.

Perciò, affinché si abbia una risonanza, alcuni argomenti delle funzioni coseno presenti nelle espressioni di  $S_1$  e  $S_2$  devono annullarsi; si verifica direttamente che questo avviene quando  $p = -2, -3/2, -1, -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2$ . I termini  $\bar{S}_3$  e  $\bar{S}_4$  sono sempre nulli. L'equazione del moto 24 assume quindi una forma analoga a quella dell'equazione del pendolo semplice:

$$\ddot{\gamma} = -\frac{3}{2}n^2 \frac{B-A}{C} (\bar{S}_1 + \bar{S}_2) \sin(2\gamma) \quad (25)$$

e, a seconda del segno di  $(B-A)(\bar{S}_1 + \bar{S}_2)$ , può indicare che il sistema è stabile per piccoli angoli  $\gamma$ .

È importante notare che tra i valori di  $p$  trovati solamente  $p = -1$  e  $p = 1$  sono presenti se si arriva all'ordine 0 nell'eccentricità; i valori  $p = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$  sono presenti se si arriva all'ordine 1 nell'eccentricità; i valori  $p = -2$  e  $p = 2$  all'ordine 2. Si può mostrare (si veda la discussione in [2]) che, ad ordini superiori, compaiono tutti gli altri valori interi e seminteri di  $p$ . Si può quindi prevedere che nel caso di eccentricità molto piccola le uniche risonanze possibili saranno quelle con  $p = \pm 1$ , e gli altri valori si presenteranno solo in caso di deviazione maggiore dall'orbita circolare.

## 2.6 I casi della Luna e di Mercurio.

### 2.6.1 Il moto e la librazione della Luna.

Il caso più famoso di risonanza spin-orbita nel sistema solare è quello della Luna. È noto che la Luna mostra sempre la stessa faccia alla Terra; si tratta quindi di una risonanza con  $p = 1$ , il che ben si accorda con la trattazione precedente nel caso di eccentricità molto piccola (per la Luna,  $e \approx 0.05$ ). La figura 5 mostra l'orbita della Luna attorno alla Terra.

Quando  $p = 1$  si ha  $(\bar{S}_1 + \bar{S}_2) \approx 1$ , che ha segno positivo. Quindi in questo caso si ha stabilità per piccoli angoli  $\gamma$  quando  $B > A$ , ovvero quando il corpo al pericentro ha l'asse principale con momento di inerzia minore in direzione del fuoco dell'orbita. Nel caso della Luna il periodo di variazione di  $\gamma$ , noto come periodo di librazione, è stato misurato direttamente e vale circa 2.87 anni [1].

### 2.6.2 Il moto e la librazione di Mercurio.

Un altro caso di particolare rilevanza è quello dell'orbita di Mercurio attorno al Sole. In questo caso l'eccentricità è più alta ( $e \approx 0.21$ ) ed il pianeta è intrappolato in una risonanza con  $p = 3/2$ .

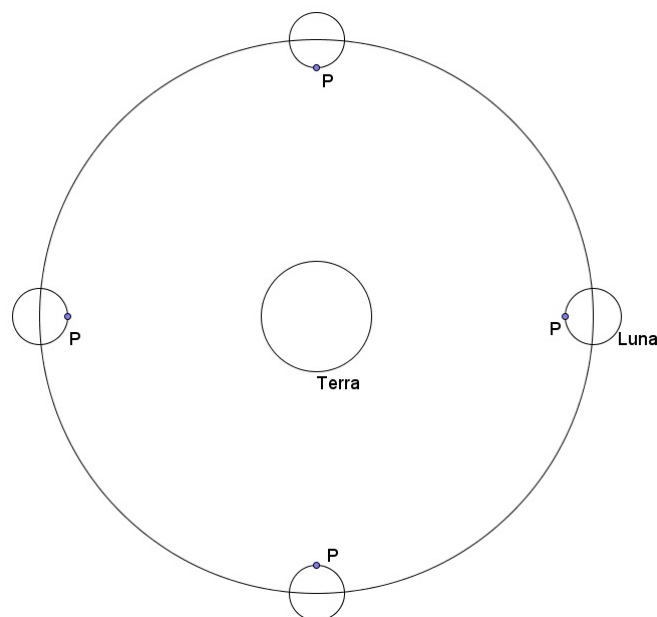


Figura 5: Orbita della Luna attorno alla Terra. L'orbita è rappresentata come circolare; P è un punto fisso sulla superficie lunare.

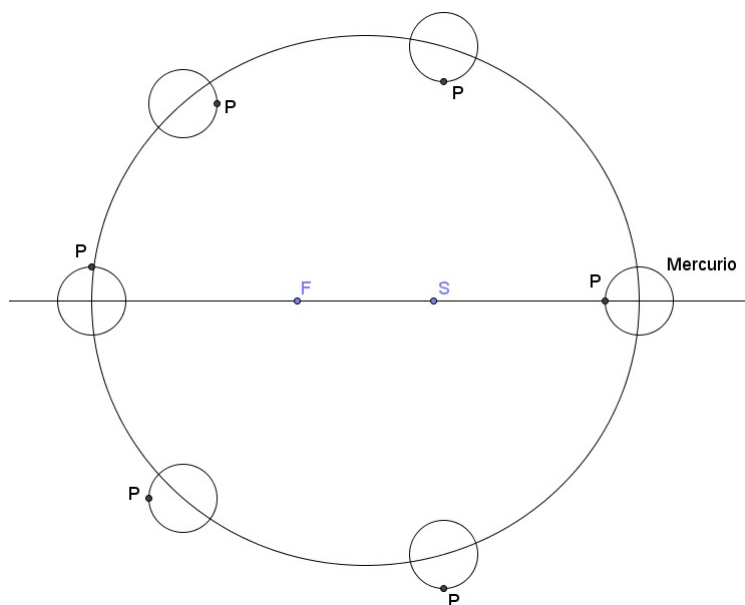


Figura 6: Rappresentazione approssimativa dell'orbita di Mercurio attorno al Sole. L'orbita rappresentata è un'ellisse con  $e = 0.25$ ; P è un punto fisso sulla superficie del pianeta.

In figura 6 si mostra l'orbita del pianeta attorno al Sole; la figura è stata realizzata utilizzando le approssimazioni di piccola eccentricità per determinare le posizioni del pianeta ad intervalli di rotazione di  $90^\circ$ .

Studiando più in dettaglio la dinamica del sistema e non limitandosi alla sola equazione mediata su molti periodi è possibile determinare, in funzione dei parametri già presenti nella 25, anche

l'ampiezza delle oscillazioni dell'angolo di librazione  $\gamma$  su una singola orbita, forzate dal momento torcente del Sole. In [2] è esplicitato il calcolo nel caso semplice di risonanza con  $p = 1$ , applicabile alla Luna, mentre in [4] è presente sia una trattazione numerica che il risultato analitico per il caso di Mercurio. La figura 7, tratta da [4] e ottenuta tramite integrazioni numeriche delle equazioni del moto, mostra l'andamento di  $\gamma$  in funzione del tempo.

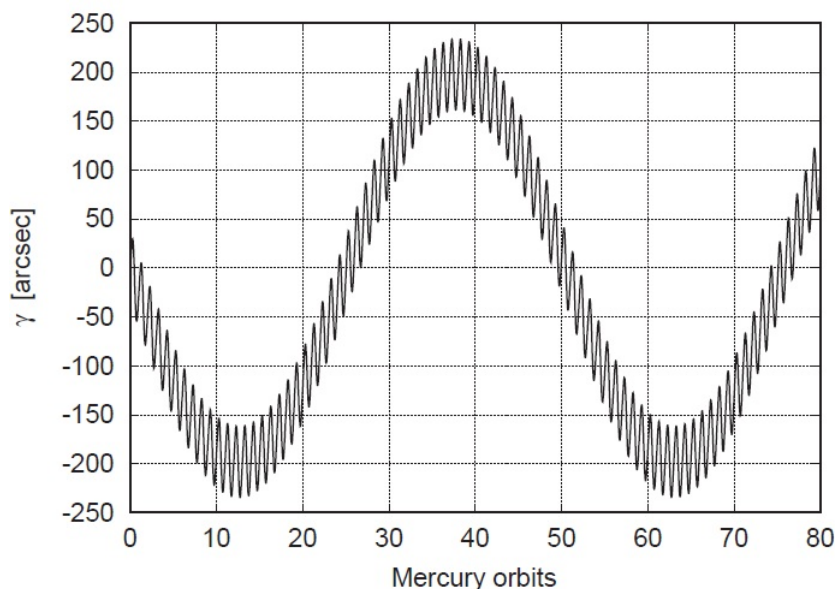


Figura 7: Angolo di librazione  $\gamma$  di Mercurio in funzione del tempo, come previsto dalle integrazioni numeriche delle equazioni del moto. Sono evidenti sia le oscillazioni forzate, il cui periodo coincide con quello dell'orbita, che la variazione del valor medio di  $\gamma$  su un singolo periodo. La figura è tratta da [4].

Misurare l'ampiezza e la frequenza di librazione di un corpo permette di studiarne la struttura interna: conoscendo i valori di  $n$  e  $B - A$  nella 25 si può determinare il valore del momento di inerzia con cui il corpo celeste si oppone al momento torcente.  $B - A$  può essere determinato in base a misure accurate del campo gravitazionale nelle vicinanze del pianeta, mentre il momento di inerzia  $C$  del pianeta può essere stimato conoscendone la densità media ed il raggio.

Se la materia che compone il corpo è allo stato solido, allora tutti gli elementi di massa partecipano alle librazioni e contribuiscono al momento di inerzia, ed il valore da usare nella 25 è effettivamente  $C$ ; se invece ci sono delle parti liquide che non oscillano con il resto della struttura, come un nucleo centrale fuso, il valore del momento di inerzia da usare nella 25 è solo quello della struttura solida  $C_s$ .

Recentemente è stato possibile misurare l'ampiezza delle librazioni forzate di Mercurio tramite l'uso di tecnologia radar; si veda [3] a riguardo. L'ampiezza delle oscillazioni di  $\gamma$  misurate risulta di  $(36 \pm 2)''$ . Questi risultati, insieme ai modelli precedenti relativi alla struttura termica del pianeta che mostrano che, se è presente un nucleo centrale fuso, allora  $C_s$  risulta significativamente minore di  $C$ , sembrano suggerire che Mercurio abbia un nucleo di materia fusa.

## Riferimenti bibliografici

- [1] B. Bertotti, P. Farinella, D. Vokrouhlicky, *Physics of the solar system*, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [2] C.D. Murray, S.f. Dermott, *Solar system dynamics*, Cambridge Univ. Press (1999).
- [3] J.L. Margot et al., *Large longitude libration of Mercury reveals a molten core*, Science 316, 710 (2007).
- [4] R. Jehn, C. Corral, G. Giampieri, *Estimating Mercury's 88-day libration amplitude from orbit*, Planetary and Space Science 52 (2004).