**Esercizio I.**

È dato un filo neutro conduttore molto lungo di materiale riflettente (di lunghezza praticamente infinita agli effetti del problema) di raggio $\sigma$ con una densità $n$ di elettroni per unità di lunghezza e cariche positive fisse.

Il filo è investito da un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\omega$ e intensità $I$. Il vettore di Poynting $\mathbf{S}_i$ dell'onda incidente è perpendicolare al filo e il campo elettrico $\mathbf{E}_i$ è diretto lungo il filo.

Si calcoli, in approssimazione non-relativistica:

*i*) la forza per unità di lunghezza esercitata dall'onda incidente sul filo (assumendo che sia completamente assorbente),

*ii*) il moto degli elettroni sollecitato dall'onda e il momento di dipolo elettrico indotto per unità di volume,

*iii*) i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, il vettore di Poynting $\mathbf{S}$ e l'intensità della radiazione emessa dal filo.

**Esercizio II.**

Sia dato un anello di raggio $a$, massa $M$ e densità lineare di carica $\lambda$ il cui asse coincide con l'asse $z$. Tale anello giace sul piano $xy$ e può ruotare attorno all'asse $z$. Sull'anello agisce un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ a simmetria cilindrica rispetto a $z$, la cui componente $z$ nella regione della spira è data da

$$B_z = (B_{0z} - \alpha z)\cos\omega t$$

dove $z$ indica la quota rispetto al piano dell'anello.

*a*) Trascurando l'autoinduzione si determini il momento della forza agente sull'anello.

La spira, vincolata a ruotare su se stessa, è anche soggetta a un momento di attrito resistente $M_a = -\gamma\dot{\theta}$.

*b*) determinare, a regime, l'ampiezza delle oscilazioni angolari in funzione di $\omega$,

*c*) determinare, a regime, la potenza media erogata dal generatore del campo $\mathbf{B}$ per mantenere l'oscillazione,

*d*) dire, giustificandolo, se il campo $\mathbf{B}$ deve avere altre componenti e eventualmente determinarle.

**Soluzioni**

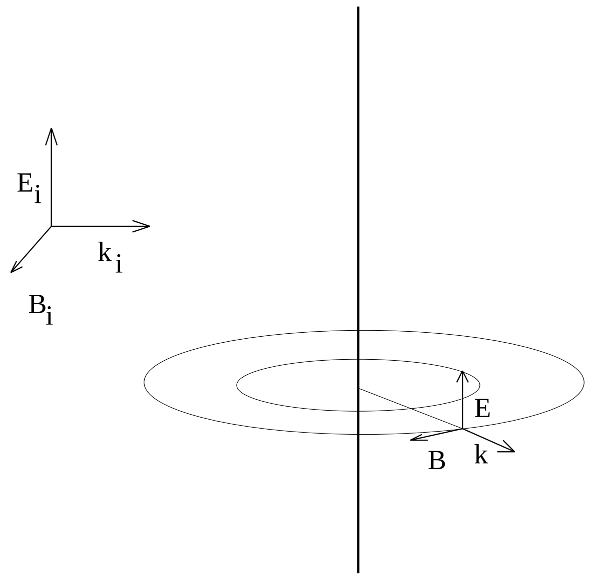
**Esercizio I.**

1) La pressione di radiazione è

$$\mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{S}_i}{c} = 2\widehat{\mathbf{k}}_i\frac{I}{c}$$

dove $\widehat{\mathbf{k}}_i$ è il versore del vettore d'onda dell'onda incidente. La forza per unità di lunghezza dell'onda incidente sul filo è allora

$$\mathbf{F}_i = 2\frac{I}{c}\sigma\widehat{\mathbf{k}}_i\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{8\pi I\sigma}{3c}\widehat{\mathbf{k}}_i.$$




2) L'equazione del moto degli elettroni del filo è

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E}_i \mathrm{e}^{i\omega t}$$

dove $I = |E_i|^2/(2\mu_0 c)$ è l'intensità dell'onda incidente (mediata sul tempo), da cui $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$ e

$$x_0 = |\mathbf{x}_0| = \frac{e}{m\omega^2}\sqrt{2\mu_0 c I}.$$

Il momento di dipolo indotto per unità di lunghezza è

$$\mathbf{p} = -enx_0 \widehat{z} \cos\omega t.$$

3) In approssimazione non-relativistica, i campi indotti da un dipolo d$\mathbf{p}$ sono

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c r^2}\mathbf{r} \wedge \mathrm{d}\ddot{\mathbf{p}}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathrm{d}\ddot{\mathbf{p}}),$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore che connette il dipolo con il punto di osservazione. Nel nostro caso, in coordinate cilindriche $(\rho, \theta, z)$, abbiamo

$$\mathbf{r} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z - z_0), \qquad \mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{p}\,\mathrm{d}z_0,$$

e dobbiamo integrare su $z_0$ tra $-\infty$ e $+\infty$:

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \rho e n x_0 \cos\omega t}{4\pi c}(\widehat{\mathbf{x}}\sin\theta - \widehat{\mathbf{y}}\cos\theta)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z_0}{\rho^2 + (z - z_0)^2},$$

$$\mathbf{E} = \int\ \mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{\omega^2 e n x_0 \widehat{z}\cos\omega t}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widehat{\rho}(z - z_0) - \rho^2\widehat{\mathbf{z}}}{(\rho^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}\mathrm{d}z_0,$$

Usando

$$\int \frac{dz}{x^2+z^2} = \frac{1}{x}\arctan\frac{z}{x}, \qquad \int \frac{dz}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{x^2\sqrt{z^2+x^2}},$$

otteniamo

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 n e x_0 \omega^2 \cos\omega t}{4c}(\widehat{\mathbf{x}}\sin\theta - \widehat{\mathbf{y}}\cos\theta), \qquad \mathbf{E} = -\frac{n e x_0 \omega^2 \cos\omega t}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\widehat{\mathbf{z}},$$

e il vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{n^2\mu_0 e^4 I \cos^2\omega t}{4\pi\varepsilon_0 m^2 c^2}\widehat{\rho}$$

e il rapporto tra l'intensità dell'onda incidente e quella dell'onda emessa è

$$\frac{n^2 e^4}{8\pi\varepsilon_0^2 m^2 c^4}.$$

Notare che l'intensitá dell'onda emessa è costante in tutto lo spazio. Ciò è dovuto al fatto che, in approssimazione non-relativistica stiamo trascurando il ritardo con cui arriva la radiazione emessa dai punti lontani del filo. L'approssimazione vale solo sufficientemente vicino al filo. L'effetto del ritardo é di far decrescere l'intensitá della radiazione emessa a grandi distanze dal filo. Quest'effetto si può studiare numericamente.

**Esercizio II.**

a) Il campo elettrico indotto sulla spira ha componente $E_\theta$ in coordinate cilindriche

$$2\pi a E_\theta = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

con

$$\phi = \pi a^2 B_z \cos\omega t.$$

Il momento della forza lungo z è

$$M_z = \int a E_\theta \lambda \, \mathrm{d}l = a\lambda E_\theta 2\pi a = -\lambda\pi a^3 B_{0z}\omega \sin\omega t \equiv M_0 \sin\omega t$$

(il segno meno indica che se il vettore **B** cresce lungo l'asse $z$ il momento è diretto nel verso contrario).

b) L'equazione del moto è

$$I\ddot{\theta} = M_z - \gamma\dot{\theta}$$

con $I$ momento di inerzia ($I = Ma$). Abbiamo in notazione complessa $M_z = iM_0\mathrm{e}^{i\omega t}$, $\theta = i\theta_0\mathrm{e}^{i\omega t}$ e sostituendo

$$\theta_0 = \frac{i\pi\lambda a^3 B_{0z}}{\omega I + i\gamma}$$

quindi l'ampiezza delle oscillazioni è

$$\theta_0 = \frac{\pi\lambda a^3 B_{0z}}{\sqrt{\omega^2 I^2 + \gamma^2}}$$

e lo sfasamento $\varphi$ è tale che

$$\tan\varphi = \frac{\omega I}{\gamma},$$

cosicché $\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t + \varphi)$.

c) La potenza esterna deve compensare la potenza $p_A$ della forza di attrito che vede, cioè

$$p_A = \gamma\dot{\theta}^2 \to \frac{1}{2}\omega^2\gamma\theta_0^2$$

dove l'ultima espressione è la media temporale.

d) Devono esserci necessariamente altre componenti di $\mathbf{B}$ perché sia $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$. In coordinate cilindriche ci possono essere $B_\theta$ e $B_r$. Ma per la simmetria cilindrica se ci fosse $B_\theta$ la circuitazione su una cinconferenza di raggio $r$ vale

$$2\pi r B_\theta = \text{corrente concatenata} = 0,$$

da cui segue che $B_\theta$ è zero. Per trovare $B_r$ facciamo il flusso di $\mathbf{B}$ su un cilindro di raggio $r$ e altezza $dz$. Sulle superfici di base 1 e 2 abbiamo

$$\phi_1 = (B_{0z} - \alpha \mathrm{d}z)\pi r^2 \cos\omega t, \qquad \phi_2 = -B_{0z}\pi r^2 \cos\omega t.$$

Sulla superficie laterale abbiamo

$$\mathrm{d}\phi_3 = 2\pi r B_r \mathrm{d}z.$$

Valendo $\phi_1 + \phi_2 + \mathrm{d}\phi_3 = 0$ abbiamo

$$B_r = \frac{\alpha r}{2}\cos\omega t.$$