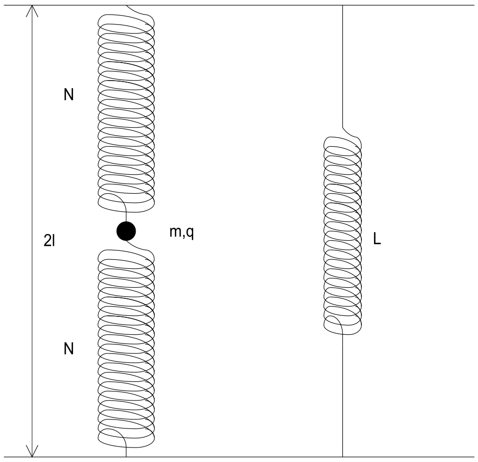
Appello di Fisica Generale II — 17 Luglio 2002.

Esercizio I



Una sferetta di carica q e massa m è connessa a due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, fatte di N spire di superficie S, con resistenza elettrica trascurabile.Le due molle con la sferetta nel mezzo vengono stirate in modo che la loro lunghezza totale sia fissa e uguale a $2l$. Le molle sono anche induttanze (solenoidi) di un circuito elettrico, chiuso su un'altra induttanza (fissa) L. La sferetta può muoversi verticalmente.All'istante iniziale nel circuito scorre un corrente elettrica tale che sia Φ il flusso totale del campo magnetico nelle tre induttanze.

1) Calcolare il campo magnetico all'interno delle molle, in funzione della loro lunghezza.

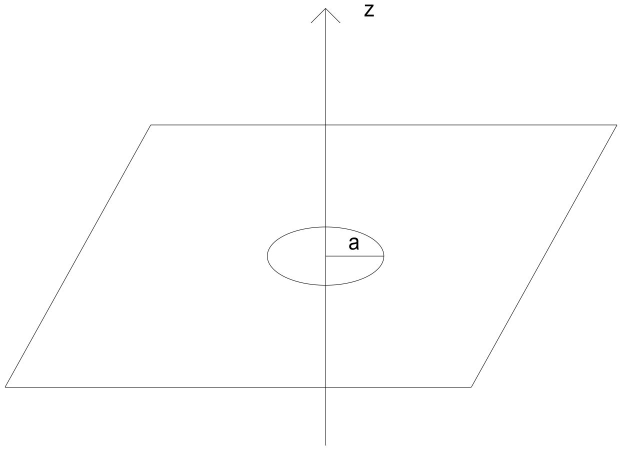
2) Calcolare il potenziale totale a cui è sottoposta la sferetta. Scrivere la condizione affinchè la posizione simmetrica in cui ciascuna molla e' lunga l sia di equilibrio stabile. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni della sferetta attorno alla posizione di equilibrio in questo caso.

3) Usando l'approssimazione adiabatica, cioè mediando nel tempo e assumendo che l'irraggiamento non alteri il moto durante un singolo periodo di oscillazione, dimostrare che, per effetto dell'irraggiamento, le oscillazioni si smorzano esponenzialmente con un tempo caratteristico e calcolarlo. Scrivere la condizione sotto la quale vale l'approssimazione fatta.

Si usi

$$\int_0^1 \frac{t^2 \, \mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio II



Sia data una distribuzione superficiale piana di carica con densità uniforme σ e di dimensioni indefinite (cioe' si considerino i campi a piccola distanza dal piano rispetto alle sue dimensioni e lontano dai bordi). Su tale superficie sia presente un foro circolare di raggio a.

a) Si determini il campo elettrico $\mathbf{E}$ sull'asse z del foro circolare.

b) Si determini la legge oraria del moto di una carica negativa $-q$ e massa m posta sull'asse z a $z \ll a$.

c) Si risponda alla domanda in b nel caso che la particella sia un dipolo $\mathbf{p}$ orientato lungo z.

d) Si determini il campo elettrico $\mathbf{E}$ anche fuori dell'asse, a distanza r da esso,ma con $r \ll a$.

Soluzione esercizio I

1) Indicando con x la distanza della sfera carica dalla posizione centrale e con I e II i due solenoidi-molla, abbiamo i campi magnetici

$$B_I = \mu_0 \frac{N}{l-x} i, \qquad B_{II} = \mu_0 \frac{N}{l+x} i.$$

I flussi di campo magnetico attraverso i due solenoidi-molla sono

$$\Phi_I = \mu_0 \frac{N^2}{l-x} iS, \qquad \Phi_{II} = \mu_0 \frac{N^2}{l+x} iS,$$

e il flusso totale del circuito, costante e uguale a Φ, è pertanto

$$\Phi = \left[L + \mu_0 N^2 S \left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x} \right) \right] i(x).$$

La corrente risulta

$$i(x) = \frac{\Phi}{L + \mu_0 N^2 S \left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x} \right)},$$

e da essa si ricavano subito le espressioni dei campi magnetici all'interno dei due solenoidi-molla.

2) Il potenziale totale a cui è sottoposta la sferetta carica è dato dal potenziale magnetico del circuito,

$$U_m = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}B_I H_I \mathrm{Vol}_I + \frac{1}{2}B_{II}H_{II}\mathrm{Vol}_{II} = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L + \mu_0 N^2 S\left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x}\right)},$$

più il potenziale elastico. Si ha in totale

$$V(x) = \frac{k}{2}\left[(x-l)^2 + (x+l)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L + \mu_0 N^2 S\left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x}\right)}.$$

Da questa espressione si ricava imediatamente che la posizione $x = 0$ è di equilibrio stabile quando la frequenza quadra delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio,

$$\omega^2 = \frac{1}{m}V''(0) = \frac{2kl}{m} - \frac{\mu_0 \Phi^2 N^2 S}{ml^3\left(L + \frac{2\mu_0 N^2 S}{l}\right)^2},$$

è positiva.

3) Nell'approssimazione di piccole oscillazioni l'energia è

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + V_{\min},$$

dove

$$V_{\min} = kl^2 + \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L + \frac{2\mu_0 N^2 S}{l}}.$$

Definendo $\mathcal{E} = E - V_{\min}$, calcoliamo la media del quadrato dell'accelerazione durante un periodo:

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{4}{T}\int_0^{x_+} \ddot{x}^2 \mathrm{d}t, \qquad x_+ = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}.$$

Ora,

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E} - \frac{m}{2}\omega^2 x^2\right)}} = \frac{\mathrm{d}x}{\omega\sqrt{x_+^2 - x^2}},$$

e $\ddot{x} = -\omega^2 x$, per cui

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{x_+} \omega^4 x^2 \frac{\mathrm{d}x}{\omega\sqrt{x_+^2 - x^2}} = \frac{2\omega^4 x_+^2}{\pi}\int_0^1 t^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\omega^4 x_+^2}{2} = \frac{\omega^2 \mathcal{E}}{m}.$$

La perdita di energia per irraggiamento durante un periodo è

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\overline{P} = -\frac{q^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}\mathcal{E},$$

da cui

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}{q^2\omega^2} = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}{2klq^2 - \frac{\mu_0 \Phi^2 N^2 S q^2}{l^3\left(L + \frac{2\mu_0 N^2 S}{l}\right)^2}}.$$

La condizione di adiabaticità è

$$\tau \gg \frac{2\pi}{\omega}, \qquad cio\grave{e} \frac{\omega q^2}{m} \ll 3\varepsilon_0 c^3.$$

Soluzione esercizio II

a) Calcoliamo il potenziale sull'asse del foro (b è un parametro che verra' mandato a inf in un secondo momento):

$$V_{(z)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{2\pi\sigma r dr}{\sqrt{r^2+z^2}},$$
$$V_{(z)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\int_a^b \frac{2\pi\sigma dr^2}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$r^2 + z^2 = t, \;\; dr^2 = dt$$

$$V_{(z)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{1}{2}\int_{a^2+z^2}^{b^2+z^2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Dopo un po' di algebra e considerando $b >> z$ si ottiene la formula:

$$V_{(z)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[b + \frac{b}{2}\frac{z^2}{b^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right]$$

E quindi il campo elettrico **E**:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]$$

b) Se $z << a$ possiamo ulteriormente approssimare la formula del campo **E**:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{a}$$

Quindi la forza F lungo z che risente la carica risulta:

$$F = -\frac{q\sigma}{2a\epsilon_0}z$$

Il moto che ne consegue è dunque un moto armonico di frequenza $\omega^2 = \frac{q\sigma}{2ma\epsilon_0}$.

c) Nel caso di un dipolo elettrico la forza si ottiene derivando l'espressione dell'energia potenziale $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, la forza risulta quindi uniforme e attrattiva per $z < 0$, e repulsiva per $z > 0$.

d)Il campo elettrico ha solo componenti lungo z e radiale (facendo la circuitazione e sfruttndo la simmetria cilindrica si vede facilmente che la componente di $\mathbf{E}$ lungo $\hat{\theta}$ è nulla: Per trovare la componenente radiale facciamo il flusso su un cilindretto di raggio r e altezza δz:

$$(E_z(z + \delta z) - E_z)\,\pi r^2 + 2\pi r \delta z E_r = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -2\frac{E_r}{r}$$

Da cui derivando E_z si ottiene E_r, in particolare se $z << a$:

$$-2\frac{E_r}{r} = \frac{\sigma}{2a\epsilon_0}$$

N.B. E_r è diretto verso l'asse z.