Appello di Fisica Generale II — 27 Giugno 2002.

ESERCIZIO I

PARTE A

Si consideri una lastra infinita posta nello spazio sul piano z=0, con una distribuzione di carica superficiale $\sigma = \sigma_0 \cos(kx)\cos(ky)$, con $k > 0$.
Considerando la condizione al bordo per la quale il potenziale ϕ tende a zero per z che tende all'infinito, si determini il valore del campo elettrico $\mathbf{E}$.
Discutere l'unicita' della soluzione trovata.

Suggerimento: si consideri un potenziale del tipo:
$\phi = \left(\sum_{m,n} a_m \cos(mx + \theta_m)\, b_n \cos(ny + \theta_n)\right) F(z)$

PARTE B

Si consideri un filo rettilineo infinito percorso da corrente I costante.
Si posizioni il filo di fronte ad un semipiano con permeabilità magnetica relativa μ_r, a distanza d da tale semipiano.
Si calcoli l'intensità della forza per unità di lunghezza agente su tale filo.
Il filo viene attratto o respinto dal semipiano?

Suggerimento: si utilizzi il metodo delle immagini.

ESERCIZIO II

Un condensatore è costituito da due armature piane circolari di raggio a poste a distanza $d << a$. Il condensatore viene caricato attraverso un generatore di corrente costante I_0, disposto come in fig. 1. Si trascurino gli effetti al bordo.
a) Si determinino - durante la carica - il campo elettrico $\mathbf{E}$ e il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ all'interno del condensatore.

Una spiretta conduttrice di raggio b ($b << a$), di resistenza elettrica R e coefficiente di autoinduzione L, viene spostata in direzione radiale, durante la carica del condensatore, dal centro fino ad una distanza $a/2$. Tale spostamento è effettuato a velocità costante v_0 da forze esterne, in modo che il piano della spira sia perpendicolare a quelli delle armature del condensatore.

b) Si determinino la corrente che circola nella spiretta durante la traslazione e il lavoro fatto dalle forze esterne.

Supponendo adesso che nella spira circoli una corrente costante I_0, la si lasci libera di muoversi a partire dalla posizione $a/2$, sempre durante la carica del condensatore.

c) Si fissi il verso della corrente nella spiretta in modo che la forza che si determina sia di richiamo (cioè verso l'asse del condensatore) e si determini conseguentemente il moto della spiretta susseguente al suo rilascio.

Esercizio II

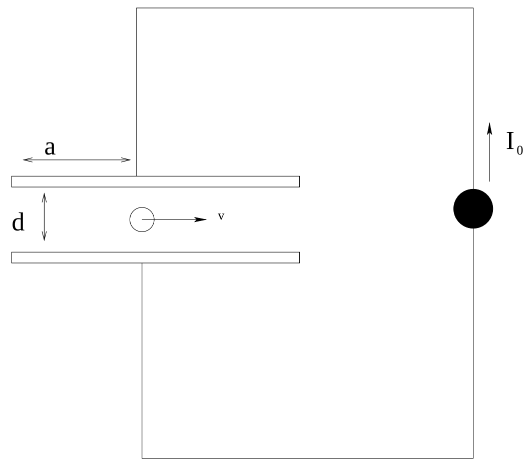

Figure 1: Condensatore

SOLUZIONI

ESERCIZIO I

PARTE A

Il campo elettrico $\mathbf{E}$ si ottiene mediante la formula $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, quindi cerchiamo una soluzione all'equazione differenziale $\nabla^2\phi = 0$ con le condizioni al bordo date nel testo e del tipo suggerito.
Pichè la componente lungo z di $\mathbf{E}$ (E_z) sulla superficie della lastra è determinata dalla distribuzione di carica:

$$2E_z = \frac{4\pi}{\epsilon_0}\sigma$$

e dato che $E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$ si vede subito che l'unico termine accettabile della soluzione proposta ($\phi = \left(\sum_{m,n} a_m \cos(mx + \theta_m) \, b_n \cos(ny + \theta_n)\right) F(z)$) è quello con $m = n = k$, ossia:

$$\phi = \phi_0 \cos(kx) \cos(ky) \, F(z)$$

Utillizando l'equazione $\nabla^2\phi = 0$ possiamo trovare F(z):

$$-k^2 F(z) + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial^2 z} = 0 \Rightarrow$$
$$F(z) = e^{-\sqrt{2}k|z|} + F_1 e^{\sqrt{2}k|z|}$$

F_1 deve essere uguale a 0, poichè ϕ per z che tende all'infinito non diverge.
La soluzione quindi risulta essere:

$$\phi = \phi_0 \cos(kx) \cos(ky) \, e^{-\sqrt{2}k|z|}$$

con $\phi_0 = \frac{2\pi\sigma_0}{\epsilon_0\sqrt{2}k}$ e quindi:

$$\mathbf{E} = -\phi_0 e^{-\sqrt{2}k|z|} \left(\sin(kx)\cos(ky), \cos(kx)\sin(ky), -sign(z)\cos(kx)\cos(ky)\right)$$

ESERCIZIO I

PARTE B

Il problema si risolve utilizzando il principio di sovrapposizione. Il filo si trova nel semispazio 1, dove c'e' il vuoto. Nel semispazio 2 invece c'e' il materiale con permeabilità magnetica relativa μ_r. Consideriamo dunque una soluzione del tipo:

- Nel semispazio 1, il campo magnetico è dato dalla sovrapposizione del campo generato dal filo percorso da corrente I più quello generato dal filo immagine, posto nel semipiano 2 a distanza d dalla superficie, percorso da corrente I_1.

- Nel semispazio 2, il campo è quello generato da un filo posto nel semipiano 1 a distanza d e percorso da corrente I_2.

Basta trovare quanto valgono I_1 e I_2 ed il problema è risolto.
Dalle equazioni di maxwell sappiamo che lungo la superficie di separazione di due semispazi, si conserva la componente normale di $\mathbf{B}$ e quella tangenziale di $\mathbf{H}$. Nel semispazio 1 $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, nel 2 $\mathbf{B} = \mu_r\ \mathbf{H}$.
Quindi si arriva facilmente al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} I - I_1 &= I_2/\mu_r \\ I + I_1 &= I_2 \end{aligned}$$

Dalle quali segue che:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I \\ I_2 &= \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} I \end{aligned}$$

la forza per unità di lunghezza agente sul filo risulta quindi:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{4\pi d} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I^2$$

Il filo viene attratto se $\mu_r > 1$ (materiale paramagnetico), se $\mu_r < 1$ viene respinto (materiale diamagnetico).

Esercizio II

a) La carica sul condensatore vale $Q(t) = It$ da cui $V(t) = (I/C)t$ e

$$E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q(t)}{\pi a^2} = \frac{It}{\pi \varepsilon_0 a^2}.$$

Per la simmetria cilindrica il campo $\mathbf{B}$ ha solo componente tangenziale; per il teorema della circuitazione

$$2\pi B r = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} = kr.$$

b) Durante lo spostamento della spiretta

$$\Phi(t) = \pi b^2 k v_0 t \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{E} = -\pi b^2 k v_0 = costante.$$

L'equazione della spiretta è

$$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = \mathcal{E} \qquad \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad con \tau = L/R.$$

b$'$) Il lavoro si calcola con un bilancio energetico tra la posizione iniziale e quella finale quando la corrente vale

$$i_i = i(T) = iav_0/2.$$

Trattando il moto in un campo $\mathbf{B}$ esterno e costante si trascura il termine di energia di mutua induzione che è esattamente bilanciato dal lavoro svolto dal generatore esterno. Resta

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_J + \frac{1}{2}Li_1^2 = \int_0^T R\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}Li_1^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(T - \tau + \tau\mathrm{e}^{-T/\tau}\right).$$

c) Nel piano del circuito esterno la corrente nella spiretta deve essere concorde a quella esterna. La forza è radiale, verso il centro, e vale (posto $\mu = \pi b^2 I_0$)

$$F = -\mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} = -k\mu = costante.$$

L'equazione del moto è dunque

$$m\ddot{r} = -k\mu$$

e il moto è uniformemente accelerato e decelerato. Detto x l'asse su cui avviene il movimento

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{k\mu}{m}t^2 \;\; per\ x > 0\ \ cio\grave{e}\ \ t \le t_1 = \sqrt{\frac{ma}{k\mu}}$$
$$x(t) = -v_0 t + \frac{1}{2}\frac{k\mu}{m}t^2 \;\; per\ x < 0\ \ e\,con\,v_0 = \frac{k\mu}{m}t_1$$

ecc.