Compito di Fisica Generale II — 7/6/2001

ESERCIZIO 1

Si consideri un anello di raggio a, su cui è distribuita uniformemente una carica q. Si calcoli:

(a) Il potenziale ed il campo elettrico sull'asse dell'anello

Ad una distanza z dal centro dell'anello viene disposta una sfera metallica perfettamente conduttrice di raggio R e massa m, in modo che il centro della sfera sia sull'asse dell'anello. Assumendo che la sfera sia collegata a terra si calcoli:

(b-2) Il potenziale sull'asse dell'anello;

(b-1) La carica totale indotta sulla superficie della sfera.

[Suggerimento: Si proceda attraverso l'individuazione della carica immagine dovuta a singoli elementi infinitesimi dq di carica sull'anello e si tenga conto delle simmetrie]

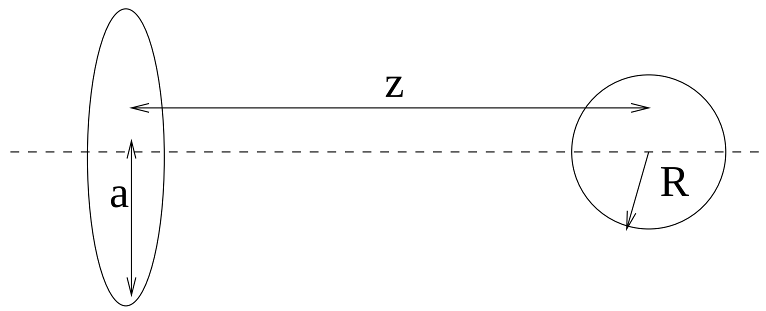
(c) Si stacchi ora la connessione con la terra e si faccia l'ipotesi che la carica totale sulla sfera sia nulla. Si calcoli Il potenziale sull'asse dell'anello.

Si faccia ora l'approssimazione che $R \ll a$:

(d) Si calcoli il momento di dipolo indotto nelle condizioni di cui al punto c) confrontando con il risultato ottenibile considerando una sferetta conduttrice in un campo elettrico uniforme esterno.

Sempre considerando $R \ll a$ e che la carica totale sulla sfera sia nulla:

(e) si determini la forza agente su di essa individuando eventuali punti di equilibrio e specificando se essi sono stabili o instabili.



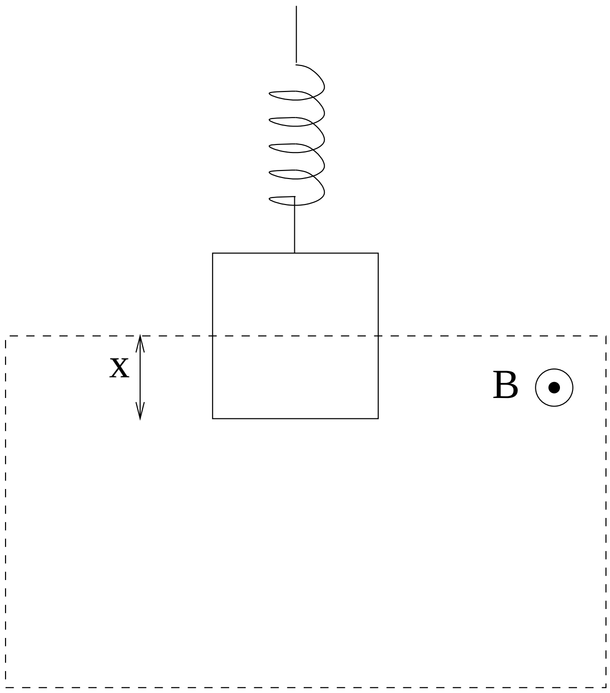
ESERCIZIO 2

Questo Esercizio si compone di tre quesiti

Quesito 1:
In una corona circolare di raggi r_1 e r_2 è distribuita una carica q con densità uniforme. Le corona ruota con velocità angolare costante ω. Si determini il campo di induzione magnetica sull'asse della corona.

Quesito 2:
Si vuole misurare il campo di induzione magnetica terrestre B_t attraverso le piccole oscillazioni intorno alla direzione di B_t di un ago magnetizzato. Si determini B_t sapendo il periodo delle oscillazioni $T = 2.5$ s, il momento magnetico dell'ago $\mu = 10^{-2}$ A·m^2,e il suo momento di inerzia $I = 10^{-7}$ kg·m^2.

Quesito 3:
Una spira quadrata di lato l, resistenza elettrica trascurabile e massa m è vincolata ad una molla di costante elastica k e può oscillare immergendosi in una regione di campo magnetico B uniforme e costante. In condizioni di riposo, la spira è già immersa per metà nel campo B (vedi figura). Si lasci libera di muoversi la spira partendo dalla condizione iniziale $x(t = 0) = 0$ e $\dot{x}(t = 0) = 0$. Si determini la legge oraria di moto della spira..

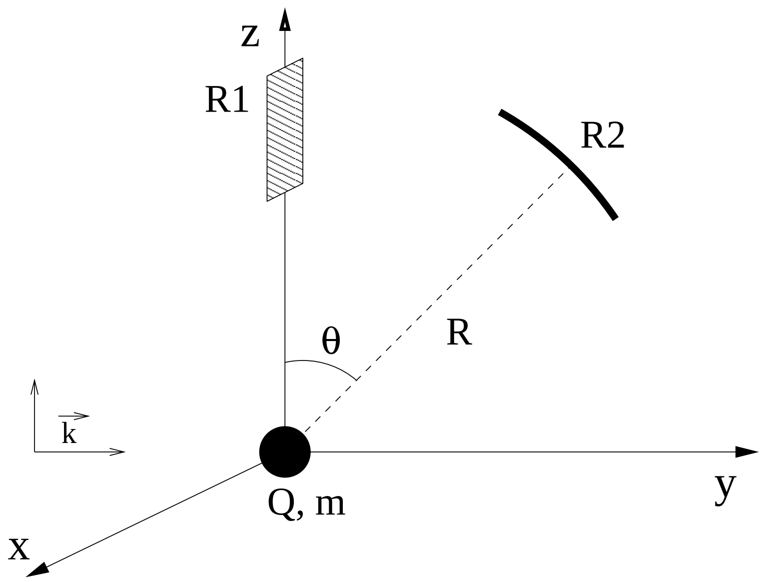


ESERCIZIO 3

Un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ polarizzata linearmente lungo z, si propaga lungo la direzione y ed investe una sferetta di carica Q e massa m inizialmente in quiete e posta nell'origine del sistema di coordinate. Un dispositivo (R1), costituito da una sottile lamina di dimensioni l_x, l_z con $l_z \gg l_x$, misura la potenza della radiazione da cui viene investito. R1 viene posto nel piano $y = 0$ orientato parallelamente alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente, come mostrato in figura, e misura una potenza media totale pari a P_M.

Un rivelatore (R2) a forma di calotta sferica di raggio di curvatura R, ed apertura angolare $\Delta\phi$, $\Delta\theta$, si trova nella posizione, espressa in coordinate polari, $(R, \pi/4, \pi/2)$, come mostrato in figura. Il rivelatore R2 é composto da una polarizzatore, che trasmette unicamente la componente y del campo elettrico dell'onda, seguito da uno specchio.

1. Scrivere l'espressione del campo elettrico e magnetico dell'onda incidente;
2. scrivere l'espressione del campo elettrico di radiazione ($r \gg \lambda$) prodotto dal moto della sferetta;
3. calcolare la pressione di radiazione risentita dallo specchio del rivelatore R2.



Soluzione Esercizio 1

Domanda a Il potenziale sull'asse dell'anello, ad una distanza x dal centro, dovuto a un elemento $d\theta$ è dato da:

$$dV = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2+a^2)^{1/2}}\frac{d\theta}{2\pi} \tag{1}$$

da cui integrando su θ:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2+a^2)^{1/2}} \tag{2}$$

Il campo elettrico si ottiene derivando rispetto a x:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{3}$$

Domanda b-1 Consideriamo un segmento angolare dell'anello di carica dq. Sfruttando il metodo delle immagini, per annullare il potenziale sulla superficie della sfera utilizziamo una carica dq' posta ad una distanza R' dal centro della sfera. Sappiamo che dq' e R' sono date da:

$$dq' = -\frac{R}{(z^2+a^2)^{1/2}}dq \tag{4}$$

$$R' = \frac{R^2}{(z^2+a^2)^{1/2}} \tag{5}$$

Essendo tutti i punti dell'anello equidistanti dal centro della sfera, e sfruttando la simmetria di rotazione intorno all'asse dell'anello, quanto detto sopra sarà vero per ogni segmento angolare. Ovvero la superficie della sfera è equipotenziale se utilizziamo un anello immagine la cui carica totale è data da:

$$q' = -\frac{R}{(z^2+a^2)^{1/2}}q \tag{6}$$

Il valore di q' è anche il valore della carica indotta sulla superficie della sfera.

Domanda b-2 La distanza di ciascun punto dell'anello immagine dal centro della sfera è R', quindi, indicando con α l'angolo formato fra l'asse dell'anello e la retta congiungente il centro della sfera con un punto dell'anello, il raggio dell'anello immagine è dato da:

$$a' = R'\sin\alpha = R'\frac{a}{(z^2+a^2)^{1/2}} = \frac{aR^2}{z^2+a^2} \tag{7}$$

Mentre la distanza del centro dell'anello immagine dal centro della sfera è data da:

$$d' = R'\cos\alpha = \frac{zR^2}{z^2+a^2} \tag{8}$$

Quindi il potenziale ad una distanza x dal centro dell'anello può essere scritto come:

$$\begin{array}{lcl} V = & 0 & (|x-z|<R) \\ V = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \frac{q'}{((z-d'-x)^2+a'^2)^{1/2}}\right] & (|x-z|>R) \end{array} \tag{9}$$

Domanda c Se la sfera ha carica totale nulla, la soluzione del problema, si può effettuare sempre con il metodo delle immagini come fatto al punto b), aggiungendo un carica $-q'$ al centro della sfera. Questo equivale a distribuire una carica $-q'$ in modo uniforme sulla superficie della sfera, per cui la carica totale sulla superficie della sfera sia nulla. Inoltre il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo e le condizioni al contorno sono soddisfatte. Il potenziale sull'asse dell'anello si scrive dunque:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q'}{R} & (|z-x| < R) \\ V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \frac{q'}{[(z-d'-x)^2+a'^2]^{1/2}} + \frac{-q'}{z-x}\right] & (|z-x| > R) \end{aligned} \tag{10}$$

Domanda d Il momento di dipolo indotto sulla sfera conduttrice è dato da:

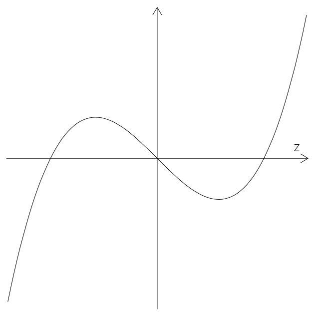
$$|\vec{P}| = d' \cdot q' = \frac{zR^3}{(z^2+a^2)^{3/2}} q = 4\pi\epsilon_0 R^3 E(z) \tag{11}$$

Avendo indicato con E il campo elettrico generato dall'anello nel centro della sfera conduttrice. Tale risultato coincide con quello che si può ottenere considerando una sfera conduttrice in un campo elettrico esterno. Il momento di dipolo è diretto in direzione opposta rispetto al campo elettrico generato dall'anello.

Domanda e Nell'approssimazione in cui il raggio della sfera è piccolo rispetto alle dimensioni dell'anello, si può calcolare la forza agente sulla sfera conduttrice come la forza agente su un dipolo indotto in campo elettrico esterno, ovvero:

$$F = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(4\pi\epsilon_0 R^3 E^2) = 4\pi\epsilon_0 R^3 E \frac{\partial E(z)}{\partial z} = \frac{R^3 q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{z(a^2-2z^2)}{(z^2+a^2)^4}. \tag{12}$$

Le posizioni di equilibrio si hanno per valori nulli della forza, ovvero per $z = 0$ e $z = \pm a/\sqrt{2}$. Studiando l'andamento della forza in funzione di z (vedi figura) si trova che $z = 0$ è stabile, mentre i due punti $z = \pm a/\sqrt{2}$ sono punti di equilibrio instabile.



Soluzione Esercizio 2

Quesito 1 La densità superficiale di carica è espressa da:

$$\sigma = \frac{q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \tag{13}$$

Ad una distanza r dall'asse e in uno spessore dr si ha una corrente:

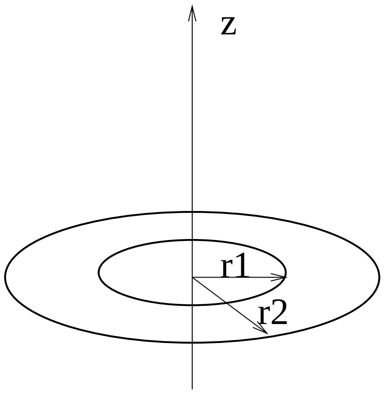
$$i(r) = \sigma 2\pi r \frac{\omega}{2\pi} dr \tag{14}$$

che contribuisce con un campo $dB(r)$ diretto lungo l'asse z come se si trattasse di una spira circolare percorsa da corrente:

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i(r)r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega\frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr \tag{15}$$

Da ui integrando si ha:

$$
\begin{aligned}
B(z) &= \int_{r_1}^{r_2} dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr = \\
&= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \left[\frac{4z^4 + 6z^2 r^2 + 2r^4}{(r^2+z^2)^{3/2}} \right]_{r_1}^{r_2}
\end{aligned} \tag{16}
$$



Quesito 2 Il momento magnetico nel campo $\vec{B}_t$ è soggetto a un momento delle forze diretto in direzione perpendicolare all'ago magnetico e al campo B_t dato da:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}_t \tag{17}$$

$$|\vec{M}| = \mu B_t \sin\theta \tag{18}$$

Da cui posso scrivere l'equazione del moto come:

$$I\ddot{\theta} = -M = -\mu B_t \sin\theta \approx -\mu B_t \theta \tag{19}$$

Quindi la frequenza delle piccole oscillazioni è data da:

$$\omega^2 = \frac{\mu B_t}{I} \tag{20}$$

$$B_t = \frac{I\omega^2}{\mu} = \frac{I}{\mu}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 6.3 \cdot 10^{-5}\mathrm{T} \tag{21}$$

Quesito 3 Sulla spira agiscono la forza elestica e la forza sul lato orizzontale percorso da corrente (si orienti l'asse x verso il basso e la corrente in senso antiorario):

$$F = k(l/2 - x) + ilB \tag{22}$$

Dove la corrente i è dovuta alla variazione del flusso attraverso la spira tramite una f.e.m. indotta:

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\dot{x}l; \tag{23}$$

$$i = -\frac{B\dot{x}l}{R} \tag{24}$$

Avendo indicato con R la resistenza della spira. Quindi l'equazione del moto si scrive come:

$$m\ddot{x} + \frac{B^2 l^2 \dot{x}}{R} + k(x - l/2) = 0 \tag{25}$$

Che utilizzando la variabile $\xi = (x - l/2)$ viene riscritta come:

$$m\ddot{\xi} + \frac{B^2 l^2 \dot{\xi}}{R} + k\xi = 0 \tag{26}$$
$$\xi(t=0) = -l/2 \tag{27}$$
$$\dot{\xi}(t=0) = 0 \tag{28}$$
$$\tag{29}$$

Equazione differenziale di secondo grado la cui soluzione può essere espressa come:

$$\xi(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \tag{30}$$
$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{B^2 l^2}{Rm} \pm \sqrt{\Delta^2}}{2a} \tag{31}$$
$$\Delta^2 = \left(\frac{B^2 l^2}{Rm}\right)^2 - 4k/m \tag{32}$$

Dove A e B sono costanti da determinare sull abase delle condizioni iniziali.

Possiamo distinguere due casi. Il primo per cui $\Delta^2 > 0$, ovvero $\alpha_{1,2}$ sono reali e negativi. In tal caso siamo in presenza di un moto smorzato in cui la spira si muove verso la posizione di equilibrio seguendo una legge oraria esponenziale. Le variabili A e B si determinano risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} A + B &= -l/2 \\ \alpha_1 A + \alpha_2 B &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Nel caso in cui Δ^2=0, la soluzione sarà del tipo:

$$\xi(t) = (At + B)e^{-B^2 l^2/Rm} \tag{34}$$

Infine nel caso in cui $\Delta^2 < 0$ siamo in presenza di un moto oscillatorio smorzato del tipo:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \Phi) \\ \gamma &= \frac{B^2 l^2}{Rm} \\ \omega &= \sqrt{|\Delta^2|} \end{aligned} \tag{35}$$

i valori di A e Φ sono da determinarsi imponendo le condizioni iniziali.

Soluzione alla domanda 1 - Esercizio 3

La potenza rivelata da R1 è dovuta solo alla radiazione dell'onda incidente poiché la radiazione emessa dal movimento della carica è radiazione di dipolo ed è quindi nulla per $\theta = 0$. Quindi si ha :

$$P_M = <|\vec{S}_i|> l_x l_z \quad <|\vec{S}_i|> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \tag{36}$$
$$\implies \quad E_0 = \sqrt{\frac{P_M}{l_x l_z} 2\mu_0 c} \tag{37}$$

Quindi i campi elettrici e magnetici dell'onda incidente sono dati da :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(ky - \omega t)}\hat{z} \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(kxy - \omega t)}\hat{x} \tag{38}$$

Soluzione alla domanda 2 - Esercizio 3

La sferetta carica che viene accelerata dal campo elettrico dell'onda puó essere descritto come un dipolo oscillante di momento di dipolo p tale che :

$$\vec{p} = \frac{Q^2}{m}\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \frac{E_0 Q^2}{m} cos(kx - \omega t)\hat{z} \tag{39}$$

Quindi il campo di radiazione prodotto dalla carica é dato da :

$$\vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}\ \vec{r} \times (\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}) \quad \vec{B}_D = -\frac{\mu_0}{4\pi c r^2}\ (\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}) \tag{40}$$

Soluzione alla domanda 3 - Esercizio 3

Poiché il polarizzatore trasmette solo la parte dell'onda polarizzata lungo $\hat{y}$, l'onda incidente E_i viene completamente assorbita. L'onda prodotta dal moto della carica ha polarizzazione lineare nel piano $\vec{r}\vec{a}$ ed è orotgonale ad $\hat{r}$. Il campo elettrico trasmesso dal polarizzatore è quindi dato da :

$$E_{Dy} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}|\ddot{\vec{p}}| sin\theta cos\theta sin\phi \tag{41}$$

Il campo magnetico dell'onda all'uscita dal polarizzatore è ortogonale ad $\vec{E}$ ed ẽ diretto lungo $\hat{x}$:

$$B_{Dx} = -\frac{|\vec{E}_D|}{c} cos\theta sin\phi \tag{42}$$

e quindi il vettore di Poyinting, S_{pol} è diretto lungo la direzione $\hat{z}$ ed il suo modulo mediato su un periodo vale :

$$< |\vec{S}_{pol}| > = \frac{E_{Dy}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2\mu_0 c}(\frac{|\ddot{\vec{p}}|}{4\pi\epsilon_0 r c^2})^2 sin^2\theta cos^2\theta sin^2\phi \tag{43}$$

La pressione di radiazione su un elemento di superficie posta nella posizione (r, θ, ϕ) è :

$$P(r, \theta, \phi) = 2 < |\vec{S}_{pol}| > cos^2\theta \tag{44}$$

dove si ha un fattore 2 poiché la superficie è riflettente ed un fattore $cos^2\theta$ poiché l'incidenza dell'onda sulla superifice è ad angolo θ. Quindi la pressione media sulla superficie è data da :

$$< P > = \frac{1}{S_c}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\phi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta\phi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\Delta\theta}{2}} K sin^2\theta cos^4\theta sin^2\phi R^2 sin\theta d\theta d\phi \tag{45}$$

dove S_c indica la superficie della calotta sferica ed il fattore K è :

$$K = (\frac{\ddot{p}}{4\pi\epsilon_0 r c^2})^2 \frac{1}{2\mu_0 c} \tag{46}$$

Per rivelatori con piccole aperture angolari la pressione media può essere approssimata alla pressione nel punto $(\pi/4, \pi/2)$:

$$< P > \simeq K(\frac{\sqrt{2}}{2})^6 = (\frac{\ddot{p}}{4\pi\epsilon_0 r c^2})^2 \frac{1}{4\mu_0 c}\frac{1}{8} \tag{47}$$