Terza prova scritta di Fisica Generale II — 24/5/2001

Una particella con carica positiva e e massa m viene lanciata da distanza infinita con energia cinetica iniziale T contro un nucleo di carica Ze vincolato nell'origine (v. figura 1). Il moto della particella è sempre non relativistico e non è alterato significativamente dall'energia irraggiata. Si determini:

a) la distribuzione angolare della radiazione emessa;

b) la polarizzazione della radiazione emessa;

c) la dipendenza della potenza irraggiata dalla distanza fra particella e nucleo;

d) l'energia totale irraggiata in tutto il processo di avvicinamento dall'infinito e susseguente ritorno all'infinito. (Nell'integrale $\int \frac{1}{r^4} \frac{1}{\sqrt{a-b/r}}$ si faccia la sostituzione $\omega^2 = a - b/r$);

e) Dal risultato in d) si mostri come l'ipotesi di moto non relativistico giustifichi il fatto che il moto non è significativamente alterato dall'irraggiamento.

Figure 1:

Soluzione alla domanda a

Il campo elettrico ed il campo magnetico di un sistema di cariche accelerato di momento di dipolo $\vec{p}$ é dato da :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}\ \vec{r} \times (\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})) \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c r^2}\ (\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})) \tag{1}$$

nel caso di una carica singola in moto accelerato si può scrivere : $\ddot{\vec{p}} = e\vec{a}_e$ dove $\vec{a}_e$ indica l'accelerazione con cui si muove la carica. La distribuzione angolare della radiazione emessa è data dal vettore di Poynting :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\ \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{\mu_0}\ B^2\ \hat{r} = \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 r^2 \epsilon_0 c^3} sin^2\theta\ \hat{r} \tag{2}$$

dove l'angolo θ é l'angolo tra il vettore accelerazione $\vec{a}$ e il raggiovettore $\vec{r}$ che indica la posizione del punto P considerato (vedi fig.2).

Soluzione alla domanda b

La polarizzazione della radiazione emessa è definita dalla direzione del campo elettrico, cioé : $\hat{E} \equiv \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})$. Quindi si ha polarizzazione lineare nel piano definito da $\vec{a}$ ed $\hat{r}$, con direzione ortogonale ad $\hat{r}$.

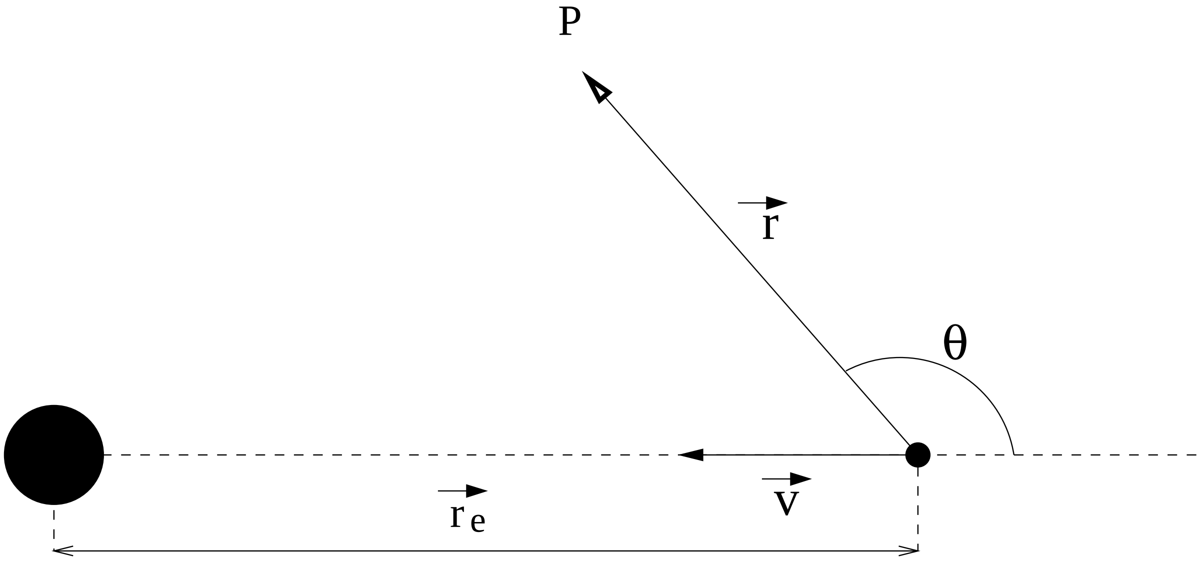

Figure 2: Definizione delle variabili utilizzate.

Soluzione alla domanda c

Per ipotesi si ha $v \ll c$, quindi possiamo trascurare il ritardo nella propagazione del campo. Integrando il vettore di Poynting su tutto l'angolo solido si ottiene la formula di Larmor che esprime la potenza totale irraggiata (P) :

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{c^3} \tag{3}$$

Date le ipotesi del problema, possiamo assumere che il moto dell'elettrone sia dovuto solo alla forza Coulombiana :

$$\vec{F} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_e^2}\hat{r}_e = m_e\vec{a} \tag{4}$$

dove r_e indica la distanza tra l'elettrone ed il nucleo. Sostituendo all'accelerazione dell'elettrone l'espressione ottenuta, si ottiene :

$$P(r_e) = \frac{Ze^6}{96\pi^3\epsilon_0^2 c^3 m_e^2}\frac{1}{r_e^2} = \frac{A}{r_e^4} \tag{5}$$

Soluzione alla domanda d

Assumiamo che l'energia totale irraggiata non alteri significativamente il moto dell'elettrone. Applicando la conservazione dell'energia meccanica si ottiene la posizione di massimo avvicinamento (r_e^m) in funzione dell'energia cinetica iniziale dell'elettrone (T), che si assume inizialmente a distanza $r_e \sim \infty$:

$$r_e^m = \frac{Ze^2 2}{4\pi\epsilon_0 T} \tag{6}$$

L'energia irraggiata nel percorso di avvicinamento al nucleo é uguale a quella irraggiata in quello di allontanamento dal nucleo. L'energia totale irraggiata é data da :

$$W = 2\int_{t_0}^{t(r_e^m)} P(t)dt = 2\int_{\infty}^{r_e^m} P(r)\frac{dt}{dr}dr = -2\int_{\infty}^{r_e^m}\frac{P(r)}{v(r)}dr \tag{7}$$

il segno $''-''$ indica che durante il percorso di avvicinamento r_e diminuisce all'aumentare di t. L'andamento di $v(r_e)$ si puó calcolare applicando la conservazione dell'energia :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} \quad \Longrightarrow v(r_e) = \sqrt{\frac{2}{m}(T - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_e})} \equiv \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r_e}} \tag{8}$$

quindi l'energia totale irraggiata è data da :

$$W = -2\int_{\infty}^{r_e^m} \frac{A}{r_e^4}\frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta/r}}dr \tag{9}$$

sostituendo $\omega^2 = \alpha - \beta/r$ e tenendo conto che $\omega^2(r=\infty) = v_0^2$ ed $\omega^2(r = r_e^m) = 0$ si ottiene :

$$W = \frac{4A}{\beta^3}\int_0^{v_0}(\omega^2-\alpha)^2 d\omega = \frac{4A}{\beta^3}(\frac{v_0^5}{5} - \frac{2v_0^5}{3} + v_0^5) = \frac{4A}{\beta^3}\frac{8}{15}v_0^5 = \frac{8m_e}{45Zc^3}v_0^5 \tag{10}$$

Soluzione alla domanda e

Poiché posso esprimere l'energia totale irraggiata come :

$$W = \frac{16}{45Z}\frac{v_0^3}{c^3}Tls \tag{11}$$

se si ha $v_0 \ll c$ allora $W \ll T$ che giustifica l'ipotesi fatta.