Compito di Fisica Generale II — 5/9/2001

Esercizio 1

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due semicerchi di raggio a, affacciati a distanza $d << a$. Un dielettrico di forma semicilindrica (raggio a, spessore d e costante dielettrica ϵ_r) può ruotare attorno ad un asse passante per il punto O in figura, riempiendo o liberando completamente il condensatore. Al dielettrico é connessa rigidamente un'asta di lunghezza $l > a$ a cui é fissata una massa m. Le masse del dielettrico e dell'asta sono trascurabili rispetto ad m. La figura mostra la configurazione di equilibrio in presenza di gravità quando il condensatore é scarico.
Si carica istantaneamente il condensatore ad una differenza di potenziale V e, prima che il dielettrico si muova, si interrompe il collegamento.

a) Detto α l'angolo che individua la posizione dell'asta rispetto alla verticale, determinare l'energia elettrostatica $U(\alpha)$ del condensatore isolato.

b) Si determini la nuova posizione di equilibrio per piccoli angoli (si sviluppi $U(\alpha)$ al secondo ordine).

c) Si calcoli il periodo delle oscillazione e la densitá di carica di polarizzazione in funzione del tempo, dall'istante di caricamento (si trascuri lo smorzamento).

Il condensatore viene riportato nella posizione di equilibrio e cortocircuitato attraverso una resistenza R. Se τ é la costante tempo del circuito elettrico e T é il periodo di oscillazione del sistema, si considerino i seguenti casi

$$1)\ \ \tau << T \qquad\qquad 2)\ \ \tau >> T \tag{1}$$

d) Si spieghi se l'energia dissipata nella resistenza nel caso 1) é maggiore, uguale o minore del caso 2).

[hbpt]

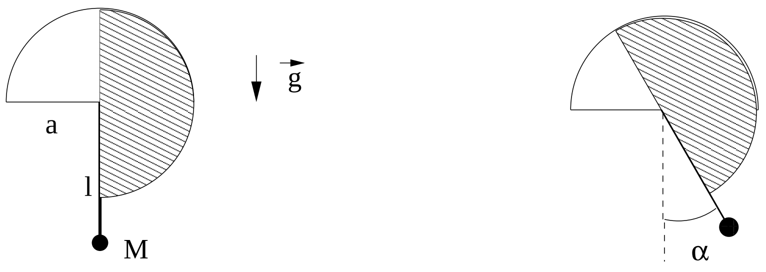

Figure 1:

Esercizio 2

Si consideri una sfera conduttrice di raggio R, conducibilitá σ e permeabilità μ posta in un campo magnetico esterno $\vec{B}_0$ uniforme e costante nel tempo. Si calcoli :

a) il campo $\vec{B}$ in tutto lo spazio;

b) la corrente di magnetizzazione;

c) il momento magnetico indotto.

Si consideri ora un campo magnetico variabile nel tempo con legge :

$$\vec{B}_0(t) = \vec{B}_0 \cos \omega t \tag{2}$$

e si assuma che la frequenza angolare ω sia tale da poter trascurare il campo magnetico generato sia dalla corrente di conduzione che da quella di spostamento. Si calcoli in questo caso :

d) la corrente di conduzione;

e) la potenza media Q assorbita dalla sfera.

Soluzione esercizio 1

La capacità del condensatore può essere scritta in funzione dell'angolo α come:

$$\begin{aligned} C = \frac{\epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\epsilon S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d}\left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} + \epsilon_r(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi})\right] = \\ = C_0 \left[\frac{\epsilon_r + 1}{2} + (\epsilon_r - 1)\frac{\alpha}{\pi}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Dove si è indicato con C_0 la capacità del condensatore quando il dielettrico è completamente fuori dalle armature:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d} \tag{4}$$

La carica che si deposità sul condensatore si può calcolare ricordando che il dielettrico non è in grado di muoversi durante il tempo di carica:

$$Q = C(0)V = \frac{\epsilon_r + 1}{2} C_0 V \tag{5}$$

Quesito a Essendo il condensatore isolato la carica sulle armature si conserva e quindi l'energia elettrostatica immagazzinata in funzione dell'angolo si esprime come:

$$U(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(\alpha)} = \frac{(\epsilon_r + 1)^2 C_0 V^2}{8\left[(\epsilon_r + 1)/2 + (\epsilon_r - 1)\alpha/\pi\right]} \tag{6}$$

Quesito b Sviluppando per piccoli angoli α l'energia elettrostatica si scrive:

$$U(\alpha) = \frac{(\epsilon_r + 1) C_0 V^2}{4}\left[1 - \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\pi(\epsilon_r + 1)}\alpha + \frac{4(\epsilon_r - 1)^2}{\pi^2(\epsilon_r + 1)^2}\alpha^2\right] + o(\alpha^3) \tag{7}$$

Il termine trascurato è dato da:

$$\frac{8(\epsilon_r 1)^3}{\pi^3(\epsilon_r + 1)^3}\alpha^3 \tag{8}$$

Che è piccolo finché è dell'ordine di 10^{-3}, da cui si ricava (usando $\epsilon_r = 2$):

$$\alpha \approx \frac{\pi(\epsilon_r + 1)}{20(\epsilon_r - 1)} = \frac{3\pi}{20} rad = 27^o \tag{9}$$

I momenti della forza elettrostatica e di quella di gravità si scrivono al primo ordine in α:

$$\begin{aligned} M_e &= -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{(\epsilon_r + 1)C_0 V^2}{4} \left[\frac{2(\epsilon_r - 1)}{\pi(\epsilon_r + 1)} - \frac{8(\epsilon_r - 1)^2}{\pi^2(\epsilon_r + 1)^2}\alpha \right] & (10) \\ M_g &= -mgl \sin\alpha \approx -mgl\alpha & (11) \end{aligned}$$

La posizione di equilibrio è raggiunta quando:

$$M_g + M_e = 0$$

$$\frac{C_0 V^2}{2} \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\pi} - \frac{4(\epsilon_r - 1)^2}{\pi^2(\epsilon_r + 1)}\alpha_0 \right] = mgl\alpha_0$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi C_0 V^2 (\epsilon_r^2 - 1)}{2\left[2C_= V^2(\epsilon_r - 1)^2 + \pi^2(\epsilon_r + 1)mgl\right]} \tag{12}$$

Quesito c L'equazione del moto si scrive come:

$$ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = k - k\alpha$$

$$k = mgl + \frac{2C_0 V^2(\epsilon_r - 1)^2}{\pi^2(\epsilon_r + 1)} \tag{13}$$

Per cui il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{2C_0V^2(\epsilon_r - 1)^2}{\pi^2(\epsilon_r + 1)ml}}} \tag{14}$$

e l'equazione oraria per $\alpha(t)$ è:

$$\alpha(t) = \alpha_0[1 - \cos(\sqrt{\frac{k}{ml^2}})t] \tag{15}$$

La differenza di potenziale fra le armature in funzione di α è:

$$V(\alpha) = C(0)/C(\alpha)V \tag{16}$$

Il campo elettrico e il vettore polarizzazione si scrivono in funzione del tempo come:

$$E(\alpha) = V(\alpha)/d \tag{17}$$

$$P(\alpha) = \chi\epsilon_0 E(\alpha) \tag{18}$$

E quindi la carica di polarizzazione indotta è:

$$\sigma_p(\alpha) = \frac{(\epsilon_r - 1)\epsilon_0}{d} \frac{C(0)}{C(\alpha)} V \tag{19}$$

Quesito d

- Se il tempo caratteristico del circuito è molto molto minore del periodo di oscillazione il condensatore si scarica prima che il dielettrico possa muoversi e l'energia dissipata è solo quella elettrostatica $E = U(\alpha_0)$. In questo caso dopo che il condensatore si è scaricato il dielettrico continuerá ad oscillare intorno alla posizione di equilibrio, $\alpha = 0$, tra $\pm\alpha_0$.

- Nel caso in cui $\tau \gg T$ il condensatore torna in posizione verticale attraverso successivi stati di equilibrio e l'energia dissipata sará tutta l'energia potenziale : $E = U(\alpha_0) + 1/2mgl\alpha_0^2$. Il dielettrico, in questo caso, tenderá per $t \to \infty$ a portarsi nella posizione di quiete $\alpha = 0$.

Soluzione esercizio 2

Quesiti a e b Il problema proposto è analogo al problema della sfera di dielettrico posta in campo uniforme. Sfruttando quindi il risultato visto in questo caso, il campo $\vec{B}$ sarà descritto da un campo uniforme all'interno della sfera e dalla sovrapposizione del campo $\vec{B}_0$ ad un campo di dipolo all'esterno. Il valore del momento di dipolo si trova imponendo le condizioni al contorno :

$$B_i \cdot \hat{r} = B_e \cdot \hat{r} \tag{20}$$
$$H_i \cdot \hat{\theta} = H_e \cdot \hat{\theta} \tag{21}$$

dove B_i e B_e indicano rispettivamente il campo B all'interno ed all'esterno della sfera, ed $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ i versori di un sistema di coordinate polari. Esplicitando le condizioni al contorno e considerando i campi $\vec{B}_0$ e $\vec{B}_i$ paralleli e concordi all'asse z si ottiene :

$$B_i cos\theta = B_0 cos\theta + \frac{2\mu_0 m}{4\pi R^3} cos\theta \tag{22}$$
$$-\frac{B_i sen\theta}{\mu} = -\frac{B_0 sen\theta}{\mu_0} + \frac{m sen\theta}{4\pi R^3} \tag{23}$$

dove si é utilizzata la formula per il campo di un dipolo magnetico $\vec{m}$:

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\cdot\hat{r} - \vec{m}] \tag{24}$$

e si é presto $\vec{m}$ disposto lungo l'asse z . Risolvendo si trova :

$$\vec{B}_i = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2}\vec{B}_0 \tag{25}$$
$$\vec{B}_e = \vec{B}_0 + \vec{B}_d \tag{26}$$
$$\vec{m} = \frac{\vec{B}_0 4\pi R^3}{\mu_0}(\frac{\mu - 1}{\mu + 2}) \tag{27}$$

Quesito c Il vettore magnetizzazione M all'interno della sfera é costante e dato da:

$$\vec{M} = \frac{3(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 2)}\vec{B}_0 \tag{28}$$

La corrente di magnetizzazione di volume è nulla essendo nullo il rotore del vettore $\vec{M}$. La corrente di magnetizzazione superficiale, invece, è data da:

$$\vec{i}_s = \hat{n} \times \vec{M} = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} B_0 \sin\theta \tag{29}$$

Quesito d Nel caso in cui la sfera venga posta in un campo magnetico variabile, il campo magnetico generato all'interno della sfera é descrivibile come nel caso precedente nell'ipotesi in cui si possano trascurare sia il campo magnetico generato dalla corrente di conduzione che il campo magnetico generato dalla corrente di spostamento. In questo caso il campo magnetico all'interno della sfera é un campo magnetico variabile generato dalla sovrapposizione del campo magnetico esterno e dal campo magnetico generato dalla correnti di magnetizzazione superificiale.
In questa ipotesi il campo elettrico indotto all'interno della sfera può essere calcolato utilizzando l'equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \tag{30}$$

dove B_i é il campo magnetico all'interno della sfera espresso in funzione del campo magnetico B_0 al punto (a). Sfruttando la simmetria cilindrica del problema e utilizzando il teorema della circuitazione si ottiene:

$$\begin{aligned} E_0 2\pi r \sin\theta &= \omega B_0 sin(\omega t)\frac{3\mu_r}{\mu_r + 2}\pi r^2 \sin\theta^2 \\ E_0 &= \omega B_0 sin(\omega t)\frac{3\mu_r}{2(\mu_r + 2)} r \sin\theta \end{aligned} \tag{31}$$

La corrente di conduzione risulta essere (secondo la legge di Ohm):

$$j = \sigma E \tag{32}$$

Quesito e La potenza dissipata per unità di volume mediata su un periodo è data da:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\sigma |E|^2 \tag{33}$$

il fattore $1/2$ é dato dalla media temporale del fattore $sin^2 \omega t$. La potenza totale si ottiene quindi integrando sul volume della sfera :

$$W = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \sigma E_0^2 2\pi r^2 sin\theta dr d\theta \tag{34}$$

da cui si ottiene :

$$W = \frac{3\pi R^5 \sigma \omega^2 B_0^2 \mu_r^2}{5(\mu_r + 2)^2} \tag{35}$$