Compito di Fisica Generale II — 16/7/2001

Esercizio 1

Si consideri una sfera conduttrice carica di raggio R su cui è disposta una carica Q. Si supponga di introdurla abbastanza velocemente in un liquido di conducibilità γ e costante dielettrica ϵ in modo tale che nella posizione finale la sfera sia molto distante dalla superficie di separazione liquido- aria.

- Trovare la carica sulla sfera in funzione del tempo a partire dall'istante in cui essa si trova immersa nel liquido nella posizione finale;
- trovare l'energia dissipata per effetto Joule nel liquido durante il processo di scarica;
- determinare il lavoro delle forze elettrostatiche durante l'immersione della sfera.

Esercizio 2

Si consideri una spira quadrata di lato a, massa m, resistenza R ed induttanza L giacente sul piano $x-y$ con lati paralleli agli assi x e y. La spira è libera di muoversi nella direzione x. Nello spazio è presente un campo magnetico la cui componente z è nulla per $x < 0$ e cresce linearmente per $x > 0$ ($B = \alpha x$).

- Si determini il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione del centro della spira.
- Si supponga che la spira si trovi tutta nella regione $x > 0$ e si scriva l'espressione della forza magnetica sulla spira in funzione della velocità e della posizione facendo l'ipotesi che il coefficiente di autoinduzione L sia nullo.
- Si supponga che la spira venga trainata ad una velocitá costante positiva v_0 e che $L \neq 0$. Trovare la potenza meccanica a regime necessaria per mantenerla in tale stato e l'energia dissipata per effetto Joule nella spira.
- Si fermi bruscamente la spira in una determinta posizione tramite una forza impulsiva che la porta a riposo in un tempo ed uno spazio molto piccoli. La spira viene poi lasciata libera di muoversi. Indicare se in questo caso la spira :
  - rimane ferma;
  - si sposta nel verso positivo dell'asse x;
  - si sposta nel verso negativo dell'asse x.

  Alla luce di queste considerazioni trovare il lavoro e l'impulso della forza esterna necessaria a fermare bruscamente e definitivamente la spira in una determinata posizione.

Esercizio 3

Per poter aumentare il potenziale massimo assumibile da una sfera metallica di raggio $R = 1\ cm$, si decide di circondarla di uno strato di paraffina. La rigiditá dielettrica dell'aria (cioè il valore massimo del campo elettrico nell'aria) è $E' = 25\ kV/cm$, quella della paraffina è $E'' = 100\ kV/cm$ e la sua costante dielettrica è $\epsilon = 2$. Si determini :

- qual è lo spessore minimo della corona sferica di paraffina da porre sulla sfera metallica;
- qual è in questa circostanza, il potenziale massimo che puó assumere la sfera.

Soluzione esercizio 1

a) Il vettore densitá di corrente è dato da :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r} \tag{1}$$

quindi integrando su una qualsiasi superficie sferica, ottengo un'equazione differenziale per la carica Q disposta sulla sfera :

$$i = -\dot{Q} = \int_\Omega \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\gamma Q}{\epsilon} \tag{2}$$

risolvendo ed imponendo le condizioni iniziali e finali ($Q(0) = Q_0, Q(\infty) = 0$) ottengo :

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t} \tag{3}$$

b) L'energia dissipata per effetto Joule corrisponde a tutta l'energia elettrostatica iniziale :

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} \tag{4}$$

Allo stesso risultato si arriva integrando la potenza dissipata per effetto Joule :

$$L_j = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty \frac{Q^2\gamma^2}{\epsilon^2}e^{-\frac{2\gamma}{\epsilon}t}\frac{1}{4\pi R\gamma}dt = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} \tag{5}$$

c) Il lavoro delle forze elettrostatiche è dato dalla variazione dell'energia elettrostatica del sistema :

$$L_{fe} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi R}\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon}\right) \tag{6}$$

Soluzione esercizio 2

a) Si indichi con x_s la coordinata x della spira come indicato in figura e si prenda il verso di percorrenza della corrente positivo in senso antiorario cosí che il verso del vettore $\vec{s}$ che indica la superficie e' parallelo al campo $\vec{B}$. Il flusso é dato da :

$$\Phi(S) = 0 \qquad x_s < 0 \tag{7}$$

$$\Phi(S) = \int_0^{x_s} \alpha a x dx = \frac{\alpha x_s^2 a}{2} \qquad 0 < x_s < a \tag{8}$$

$$\Phi(S) = \int_{x_s - a}^{x_s} \alpha a x dx = \frac{\alpha a}{2}(2x_s a - a^2) \qquad x_s > a \tag{9}$$

b) La forza agente su un circuito immerso in un campo magnetico è data da :

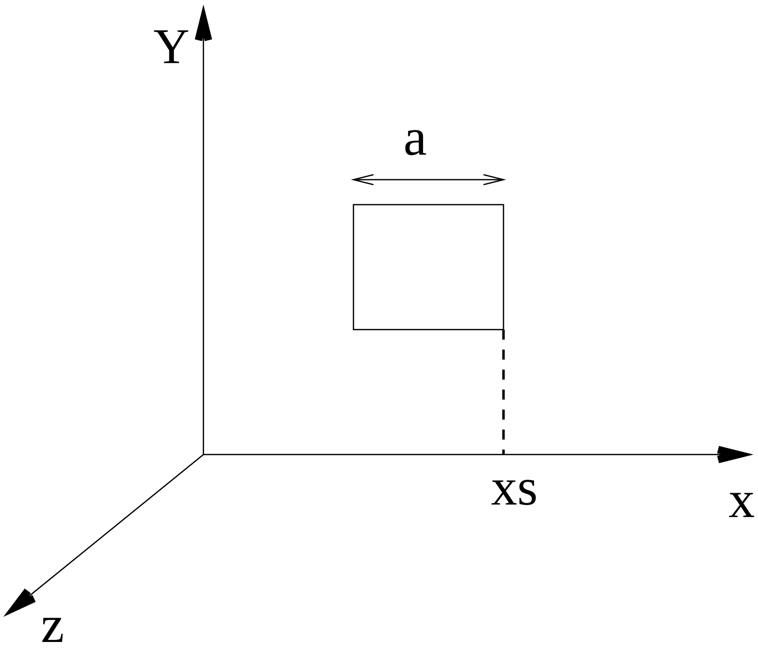

Figure 1:

$$\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B} = ia^2\alpha\hat{x} \tag{10}$$

dove i indica la corrente che scorre nella spira. La corrente che circola nella spira si calcola scrivendo l'equazione del circuito :

$$-\frac{d\phi}{dt} = Ri = -\alpha a^2\dot{x} \tag{11}$$

da cui si ricava la corrente i e quindi si ottine la forza che risulta resistente al moto :

$$\vec{F} = -\frac{\alpha^2 a^4}{R}\dot{x}\hat{x} \tag{12}$$

c) La corrente che circola nella spira si ottiene di nuovo utilizzando l'equazione del circuito :

$$-\frac{d\Phi}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt} = -\alpha a^2 v_0 \tag{13}$$

Da cui si ottiene :

$$i(t) = -\frac{\alpha v_0 a^2}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{14}$$

Quindi la potenza dissipata dalla forza meccanica esterna (F_mec) a regime é data da :

$$W = Fv_0 = -F_{mec}v_0 = i\alpha a^2 v_0 = \frac{\alpha^2 a^4 v_0^2}{R} \tag{15}$$

L'energia dissipata per effetto Joule é come sempre Ri^2.
d) La forza applicata alla spira per fermarla é impulsiva quindi il flusso si puó ritenere pressoché costante, quindi posso scrivere :

$$\Phi(B)_i + Li_i = \Phi(B)_f + Li_f \tag{16}$$

da cui si ottiene che la corrente all'istante iniziale in cui la spira (i_f)é ferma é uguale alla corrente raggiunta a regime quando la spira si muoveva :

$$i_i = -\frac{\alpha v_0 a^2}{R} \tag{17}$$

il segno negativo indica che la corrente scorre in senso orario (date le nostre convenzioni). Quindi per le considerazioni fatte precedentemente la spira torna indietro. La corrente della spira per un istante generico t dopo che la spira é stata fermata é dato da :

$$i(t) = i_i e^{-\frac{R}{L}t} \tag{18}$$

L'impulso e l'energia necessari a fermare bruscamente e definitivamente la spira si possono calcolare come dati da due contributi, uno é quello necessario a fermare bruscamente la spira ed il secondo é quello necessario a bloccarla definitivamente.
L'impulso e l'energia necessari a fermare la spira sono rispettivamente $-mv_0\hat{x}$ e $1/2mv_0^2$.
L'impulso necessario a fermarla definitivamente é dato da :

$$T = \int_0^\infty F dt = \int_0^\infty i(t) a^2 \alpha dt = \frac{a^4 \alpha^2 L v_0}{R^2} \tag{19}$$

La forza non compie ulteriore lavoro per fermare definitivamente la spira e l'energia elettromagnetica rimanente viene dissipata per effetto Joule.

Soluzione esercizio 3

Il campo elettrico all'interno della paraffina non deve superare il valore E'' e lo strato x di paraffina deve essere tale che il campo elettrico nell'aria esterna sia al massimo uguale a E'. Detta Q la carica vera sul conduttore, all'interno del dielettrico, il campo é dato da :

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon' r^2} \tag{20}$$

che assume il suo valore massimo per $r = R$. Perciò potrà essere al massimo

$$E'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} \tag{21}$$

Sulla superficie esterna della paraffina il campo potrà essere al massimo :

$$E_0^+(R+x) = E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R+x)^2} \tag{22}$$

Eliminando la carica dalle due equazioni si ottiene :

$$R + x = R\sqrt{\frac{\epsilon' E''}{E'}} = 2.8\ cm \tag{23}$$

quindi $x = 1.8$ cm. Il potenziale che assume la sfera in queste condizioni si ottiene integrando il campo elettrico :

$$V = \int_R^{R+x} E dr + \int_{R+x}^\infty E_0 dr = E''[R + \frac{R^2}{R+x}(\epsilon' - 1)] = 1.35 \cdot 10^5 V \tag{24}$$

In assenza dello strato di paraffina il potenziale massimo che la sfera può assumere é :

$$V' = E'R = 2.5 \cdot 10^4 V \tag{25}$$