Fisica Generale II – Secondo appello - 28.6.2001

Esercizio 1.

Due spire circolari di resistenza elettrica trascurabile uguali di autoinduttanza L, massa m e raggio a sono immerse nel campo gravitazionale e poste a distanza fissa $l \gg a$. Con riferimento alla figura, entrambe le spire sono perpendicolari al piano del foglio.

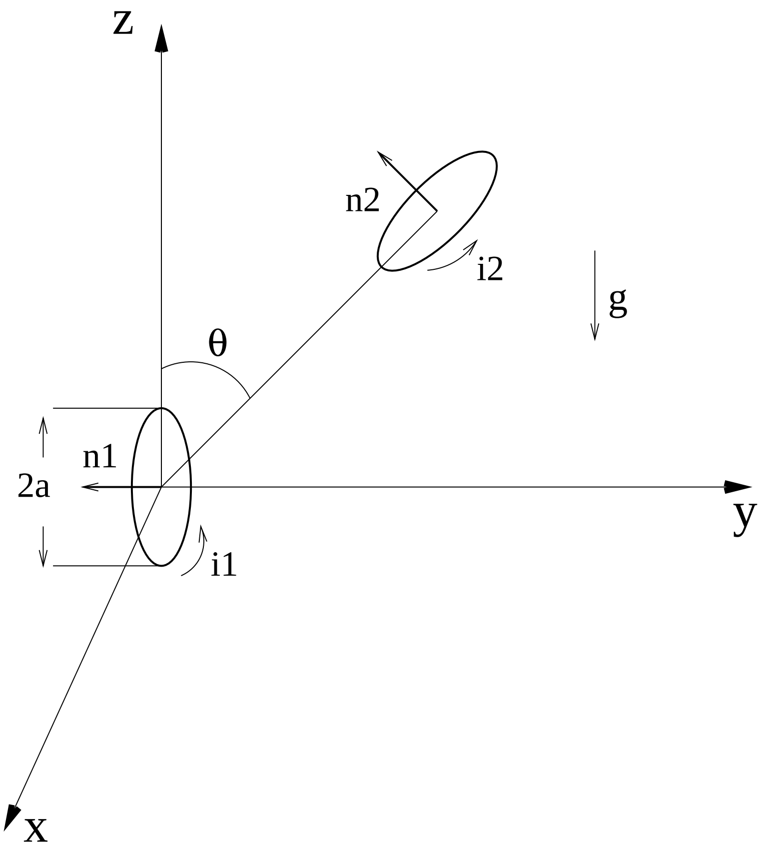

Figure 1:

Indicando con z la direzione verticale, la prima spira è in posizione fissa centrata nell'origine O. La seconda spira può ruotare nel piano yOz, rimanendo sempre perpendicolare al foglio e a distanza l dalla spira 1. Indicando con n_1 e n_2 i versori normali alle due spire, si ha $n_1 = -\hat{y}$ e n_2 nel piano yOz come in figura. Siano i_1 e i_2 le correnti che circolano nelle due spire, eventualmente funzioni di θ.

Determinare le posizioni di equilibrio stabile e instabile nei casi seguenti:

1) Le correnti nelle due spire sono tenute costanti da generatori;

2) entrambe le spire sono sconnesse da generatori. Siano $i_2 = 0$ e $i_1 = i_{1,0}$ a $\theta = 0$.

Discutere i vari casi, al variare dei valori relativi delle grandezze in gioco, cioè le correnti i_1, i_2, la massa m e il rapporto a/l e l'autoinduttanza L.

Si può impostare il problema in due modi: a) trovando l'equilibrio dei momenti delle forze; b) minimizzando un'opportuna energia, che tenga conto dell'eventuale apporto dei generatori.

Facoltativo. Discutere il caso in cui la corrente i_1 è tenuta costante da un generatore, ma i_2 è libera (la spira 2 non è connessa ad alcun generatore).

Esercizio 2.

In un modello atomico grossolano, gli elettroni orbitanti intorno al nucleo sono descritti da una distribuzione sferica di carica a densità uniforme. Si supponga, nel seguito, che la simmetria sferica di tale distribuzione si mantenga in ogni caso. Si consideri un atomo il cui nucleo abbia carica $Q > 0$, mentre la "nuvola" elettronica ha raggio a, nello stato stabile. L'atomo può assorbire o cedere "pacchetti" di energia, variando la sua dimensione (a carica costante).

a) Determinare la variazione relativa del raggio dell'atomo, quando questo assorbe un'energia ΔE, specificando se la dimensione dell'atomo aumenta o diminuisce. (Nel calcolo dell'energia elettrostatica del sistema si proceda prima valutando l'energia associata alla sola carica negativa e poi aggiungendo il nucleo).

In un mezzo costituito da tali atomi, essi sono disposti ai vertici di un reticolo cubico di passo δ. Il mezzo viene inserito in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$, perpendicolare alla giacitura di un piano reticolare (v. figura).

b) Determinare la costante dielettrica relativa del mezzo.

Riempiendo con tale mezzo lo spazio tra le due armature di un condensatore piano mantenuto a potenziale costante, l'energia del condensatore aumenta.

c) Interpretare questo aumento a livello atomico, seguendo il modello indicato e verificando la consistenza con gli effetti macroscopici.

Soluzione esercizio 1

Il caso a correnti costanti può essere sviluppato utilizzando l'equazione dei momenti. La forza che agisce sulla spira $\hat{n}_2$ è data da :

$$\vec{F} = (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = -\frac{M_2}{r}\frac{d\vec{B}}{d\alpha} = -\frac{M_2}{r}\frac{d(\hat{r}B_r + \hat{\alpha}B_\alpha)}{d\alpha} \tag{1}$$

Il campo magnetico $\vec{B}$ generato dalla spira $\hat{n}_1$ a grandi distanze è il campo di un dipolo magnetico :

$$B_r = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3} M_1 \cos\alpha = -frac2\mu_0 4\pi r^3 M_1 \sin\theta \tag{2}$$

$$B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} M_1 \sin\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} M_1 \cos\theta \tag{3}$$

Considerando che $\theta = \alpha + \pi/2$ si ha : $d\theta = d\alpha$ e $\hat{\alpha} = \hat{\theta}$. Quindi la forza agente sul dipolo 2 :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 M_1 M_2}{4\pi r^4}(2\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) \tag{4}$$

Il momento della forza rispetto al centro del dipolo 2 è dato da :

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{\mu_0 M_1 M_2}{4\pi r^3}\sin\theta \tag{5}$$

Ovvero il momento è nullo e siamo in presenza di un punto di equilibrio instabile per $\theta = 0$ e stabile per $\theta = \pi$.

Il problema si risolve più rapidamente utilizzando l'energia potenziale del sistema costituito dalle due spire. L'energia totale del sistema si scrive come:

$$U = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}L(i_1^2 + i_2^2) + Mi_1 i_2 + \int dt(\epsilon_1 i_1 + \epsilon_2 i_2) \tag{6}$$

Dove ϵ_1 e ϵ_2 sono le forze elettromotrici indotte sui circuiti date da:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= -L\frac{di_1}{dt} - \frac{d}{dt}(Mi_2) \\ \epsilon_2 &= -L\frac{di_2}{dt} - \frac{d}{dt}(Mi_1) \end{aligned} \tag{7}$$

M è il coefficiente di mutua induzione, eventualmente dipendente dall'angolo θ dato da:

$$M = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\pi a^2 \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2}{i_1} = -\frac{\pi \mu_0 a}{4}(\frac{a}{l})^3 \cos\theta \tag{8}$$

Sostituendo le equazioni (7) nell'espressione (6) scriviamo:

$$\begin{aligned}U = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}L(i_1^2 + i_2^2) - \frac{1}{2}(i_1^2 + i_2^2) + Mi_1 i_2 - \int dt(i_1\frac{dMi_2}{dt} + i_2\frac{dMi_1}{dt}) = \\ = mgl\cos\theta - \int dt i_1 i_2(\frac{dM}{dt}) \end{aligned} \tag{9}$$

Caso 1

Nel caso in cui le correnti sono costanti l'energia potenziale si esprime come:

$$U = (mgl + i_1 i_2 \frac{\pi\mu_0 a}{4}(a/l)^3)\cos\theta \tag{10}$$

Che ricorda l'equazione dell'energia potenziale di un pendolo, con una massa effettiva

$$\bar{m} = m + i_1 i_2 \frac{\pi \mu_0}{4g}(a/l)^4 \tag{11}$$

Per cui:

- (a) se $\bar{m} > 0$. $\theta = \pi$ è stabile e $\theta = 0$ è instabile;
- (b) se $\bar{m} < 0$. $\theta = \pi$ è instabile e $\theta = 0$ è stabile;
- (c) se $\bar{m} = 0$. il pendolo è libero

Caso 2

In questa situazione i movimenti avvengono a flusso costante, quindi sarà:

$$\begin{aligned}Li_1 + Mi_2 &= Li_{1,0} \\ Li_2 + Mi_1 &= 0\end{aligned} \tag{12}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{i_{1,0}}{1-(M/L)^2} \\ i_2 &= -\frac{M}{L}i_{1,0}1-(M/L)^2\end{aligned} \tag{13}$$

Sostituendo in (9) l'energia potenziale viene scritta per $|M| << L$:

$$\begin{aligned}U &= mgl\cos\theta + \frac{\xi^2}{2L}\cos^2\theta + \frac{1}{2}Li_0^2 \\ \xi &= \frac{\pi}{4}\mu_0 a(a/l)^3 i_{1,0} l\end{aligned} \tag{14}$$

$$U' = -\sin\theta(mgl + \frac{\xi^2}{L}\cos\theta) \tag{15}$$
$$U'' = -mgl\cos\theta + \frac{\xi^2}{L}(-2\cos^2\theta + 1) \tag{16}$$

I punti di equilibrio sono per $\theta = 0, \pi$,arccos$(-\frac{mglL}{\xi^2})$ (solo se $|mglL| < \xi^2$). Distinguiamo tre casi:

- $mglL > \xi^2$: $\theta = 0$ è instabile, $\theta = \pi$ è stabile;
- $mglL < -\xi^2$: $\theta = 0$ è stabile, $\theta = \pi$ è instabile;
- $|mglL| < \xi^2$: $\theta = 0, \pi$ sono instabili, $\theta =$arccos$(-\frac{mglL}{\xi^2})$ e $\theta =$arccos$(-\frac{mglL}{\xi^2}) + \pi$ sono punti stabili.

Caso 3 (facoltativo)

In questa situazione i movimenti avvengono a flusso costante sulla spira 2 e a corrente costante sulla spira 1, quindi sarà:

$$Li_2 + Mi_1 = C \tag{17}$$

Essendo $M(\theta = 0) = 0$ la costante è data da $C = Li_{2,0}$. E quindi:

$$i_2 = \frac{C}{L} - \frac{M}{L}i_1 \tag{18}$$

Sostituendo in (6) l'energia potenziale viene scritta sotto forma integrale come:

$$U = mgl\cos\theta - \int dti_1(\frac{C}{L} - \frac{M}{L}i_1)\frac{dM}{dt} \tag{19}$$

Con opportune manipolazioni algebriche diventa:

$$\begin{aligned} U &= \bar{m}gl\cos\theta + \frac{\xi^2}{2L}\cos^2\theta \\ \bar{m} &= m + \frac{\pi}{4}\frac{\mu_0}{g}i_1 i_{2,0}(a/l)^4 \\ \xi &= \frac{\pi}{4}\mu_0(a/l)^4 i_1 l \end{aligned} \tag{20}$$

$$U' = -\sin\theta(\bar{m}gl + \frac{\xi^2}{L}\cos\theta) \tag{21}$$
$$U'' = -\bar{m}gl\cos\theta + \frac{\xi^2}{L}(-2\cos^2\theta + 1) \tag{22}$$

I punti di equilibrio sono per $\theta = 0, \pi$,arccos$(-\frac{\bar{m}glL}{\xi^2})$ (solo se $|mglL < \xi^2$). Distinguiamo tre casi:

- $\bar{m}glL > \xi^2$: $\theta = 0$ è instabile, $\theta = \pi$ è stabile;
- $\bar{m}glL < -\xi^2$: $\theta = 0$ è stabile, $\theta = \pi$ è instabile;
- $|\bar{m}glL| < \xi^2$: $\theta = 0, \pi$ sono instabili, $\theta =$ arccos$(-\frac{\bar{m}glL}{\xi^2})$ e $\theta =$ arccos$(-\frac{\bar{m}glL}{\xi^2}) + \pi$ sono punti stabili.

Soluzione Esercizio 2

Domanda a L'energia del sistema è data da $U = U^- + U^+$ dove U^- è l'energia della distribuzione sferica negativa e U^+ l'energia del nucleo entro la distribuzione negativa. Il campo elettrico della distribuzione negativa è:

$$\vec{E}_1 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}\vec{r} \quad \text{per} \quad r < a \tag{23}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} \quad \text{per} \quad r > a \tag{24}$$

da cui:

$$U^- = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left[\int_0^a E_1^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty E_2^2 4\pi r^2 dr\right] = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a} \tag{25}$$

Il potenziale nel centro della distribuzione sferica vale:

$$V(0) = \int_0^a E_1 dr + \int_a^\infty E_2 dr = -\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} \tag{26}$$

Per cui l'energia del nucleo è:

$$U^+ = QV(0) = -\frac{3Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \tag{27}$$

In totale l'energia del sistema è:

$$U = -\frac{9Q^2}{40\pi\epsilon_0 a} \tag{28}$$

che risulta negativa, come ci si doveva attendere essendo l'atomo un sitema legato. Differenziando si ottiene:

$$\frac{dU}{da} = \frac{9Q^2}{40\pi\epsilon_0 a^2}; \qquad \frac{\Delta U}{U} = -\frac{\Delta a}{a} \tag{29}$$

Si ottiene infine:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\Delta E}{U} = \frac{40\pi\epsilon_0 a}{9Q^2}\Delta E \tag{30}$$

In particolare si ricava che l'assorbimento di energia provoca un aumento del raggio dell'atomo.

Domanda b Sia $\vec{E}$ il campo elettrico (totale) nel punto ove è presente un atomo del mezzo in esame; per simmetria si può dire che $\vec{E}$ è parallelo ad $\vec{E}_0$. Se la distribuzione sferica trasla di una quantità x essa risente del campo del nucleo. Per determinare la forza è sufficiente calcolare la forza che la carica negativa esercita sul nucleo. Come si è gia visto la forza è proporzionale ad x per cui la condizione di equilibrio sarà:

$$-QE - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}x = 0 \rightarrow x = -\frac{4\pi\epsilon_0 a^3 E}{Q} \tag{31}$$

(il verso positivo di x è concorde con $\vec{E}$). Il dipolo atomico indotto risulta allora:

$$p_0 = Q|x| = 4\pi\epsilon_0 a^3 E \text{da cui}$$
$$\vec{P} = n\vec{p}_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{\delta^3}\vec{E} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\vec{E} \tag{32}$$

essendo $n = 1/\delta^3$ la densità numerica di dipoli atomici. Si ricava, infine,:

$$\epsilon_r = 1 + 4\pi a^3/\delta^3 \tag{33}$$

Domanda c Inserendo il dielettrico la densità di energia passa da $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ a $frac12\epsilon_0\epsilon_r E^2$ e dunque l'aumento di energia per unità di volume è:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E^2 \tag{34}$$

A livello microscopico il campo esterno compie lavoro sulla carica elettronica, contro la forza di attrazione del nucleo data da:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}x \to \Delta L = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}x^2 \tag{35}$$

Ricordando che $p_0 = Qx = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$ si ottiene, come ci si doveva aspettare (energia di un dipolo indotto)

$$\Delta L = \frac{1}{2}p_0 E \tag{36}$$

Infine per avere la variazione per unità di volume si moltiplica per $n = 1/\delta^3$ e ricordando che:

$$np_0 = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E \tag{37}$$

si ricava:

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E^2 \tag{38}$$