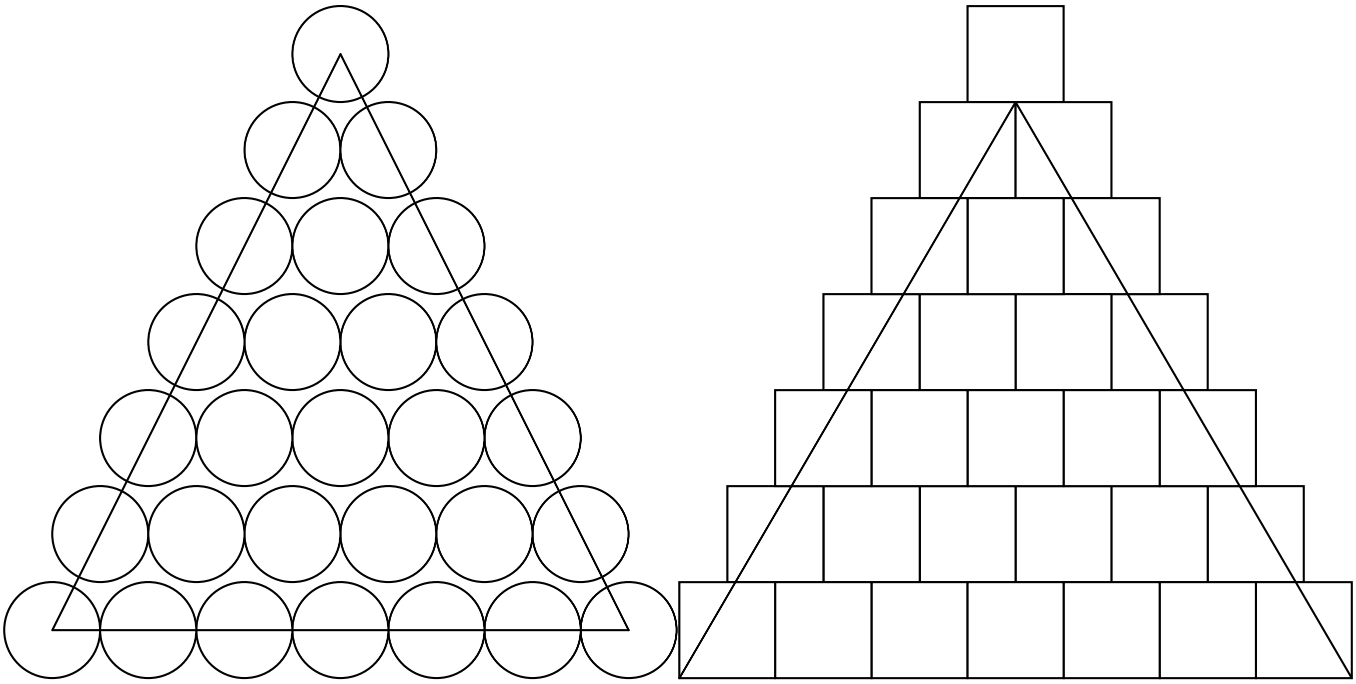
Algoritmi matematici nelle lettere di Gerbert

L'interesse di Gerbert per le discipline matematiche, o comunque legate alla matematica, risulta già con significativa evidenza dalla descrizione della scuola di Reims offertaci da Richer di Saint-Remi nei capitoli 46-54 del III libro delle *Storie*. Mentre infatti l'insegnamento delle discipline del *Trivium* è svolto in stretta connessione con un modello didattico già largamente consolidato, alle discipline del *Quadrivium* Gerbert riserva le sue migliori invenzioni didattiche, dall'uso dell'abaco (e delle cifre arabe) per l'Aritmetica, a quello del monocordo (e degli organi) per la Musica, fino alle celebri "sfere" (e forse all'astrolabio) per l'Astronomia.
Un'altra importante fonte di informazioni sugli interessi matematici di Gerbert ci viene dalle sue lettere "scientifiche", purtroppo assenti nella maggior parte delle edizioni (con le lodevoli eccezioni di Pratt Lattin e di Riché-Callu).
Possiamo identificare, utilizzando il vocabolo "lettera" nell'accezione più ampia, otto lettere scientifiche, di cui una sola "numerata", la Lettera 153 indirizzata a fratello Adam e relativa al problema del calcolo della durata del dì e della notte alle diverse latitudini in differenti periodi dell'anno. Delle altre sette ben sei sono indirizzate a Costantino, suo allievo e futuro abate di Micy, mentre l'ultima (anche cronologicamente) è diretta al prete Adelboldo, futuro vescovo di Utrecht e autore di un trattatello sul calcolo del volume della sfera.
La prima lettera a Costantino è relativa alle regole della moltiplicazione e della divisione.
Le regole di Gerbert per la moltiplicazione appaiono nel complesso abbastanza banali ai nostri occhi, ma vanno collegate alle istruzioni per l'uso dell'abaco, che Gerbert propugnava, associandolo per la prima volta in Europa alle cifre indo-arabiche e all'introduzione della notazione posizionale: a riprova dell'impatto dell'insegnamento di Gerbert ricordiamo che nel Medioevo gli abacisti erano detti anche gerbertisti, e che anche l'opera fondamentale di Fibonacci si chiama *Liber Abaci.* Per lo stesso motivo le regole per la divisione sono molto complesse e di difficile comprensione, tant'è vero che la loro interpretazione moderna è stata data soltanto nel 1864 da G. Friedlein in *Gerberts Regeln der Division*.
La seconda lettera è semplicemente un'introduzione al trattato di aritmetica. La terza contiene le istruzioni dettagliate per la costruzione della sfera, sulle quali non torneremo in questa sede.
Le altre tre lettere a Costantino riguardano proprietà e problemi dei numeri superparticolari.
I rapporti superparticolari sono frazioni che si ottengono aggiungendo all'unità l'inverso di un intero, ed equivalgono ai rapporti tra numeri immediatamente successivi:

$1 + 1/2 = 3/2$ rapporto sesquipedale
$1 + 1/3 = 4/3$ rapporto sesquiterzo
$1 + 1/4 = 5/4$ rapporto sesquiquarto

Questi rapporti sono particolarmente importanti nella teoria musicale, essendo legati ai rapporti di frequenza tra le note nella scala naturale e ai principali accordi. Vale certamente la pena di notare che la spiegazione di un oscuro passo di Boezio (*Institutio Arithmetica* II,1), presentata da Gerbert nell'ultima lettera a Costantino, era ancora nota e accettata nel XIII secolo.
Un particolare interesse per la comprensione della psicologia e della cultura scientifica di Gerbert e dei suoi contemporanei ha la lettera ad Adelboldo, in cui viene affrontato il problema del calcolo dell'area del triangolo equilatero, a partire dalla misura della lunghezza del lato.
Il quesito, in sé facilmente risolubile mediante l'applicazione del teorema di Pitagora, era reso problematico dall'esistenza, in un'opera di Boezio, della regola che Gerbert definisce "aritmetica", consistente nel calcolare l'area di un triangolo di lato N mediante la somma dei primi N numeri.
Questa regola, palesemente erronea, nasce probabilmente dal malinteso generato dal fatto che è possibile "costruire" un triangolo equilatero sovrapponendo sequenze di cerchi allineati nella configurazione detta "di massimo impacchettamento" e congiungendo con segmenti di retta i centri dei cerchi collocati ai tre vertici, a partire dal semplice esempio di tre cerchi uguali posti in contatto reciproco. Per il calcolo dell'area non si possono tuttavia sostituire i cerchi con quadrati, trascurando la riduzione nella distanza verticale tra le righe dovuta appunto all'impacchettamento.



Gerbert propone come alternativa per il calcolo l'uso della frazione 6/7 per il rapporto tra l'altezza e la base del triangolo. Si noti innanzitutto che 6/7 è l'inverso di un rapporto superparticolare (sesquisesto), e che per di più la frazione 1/7 entra anche nella formula per l'area del cerchio adottata da Adelboldo, che usa 3+1/7 = 22/7 = 3,1428… al posto di π = 3,1416…

Quanto all'accuratezza dell'approssimazione, notiamo che 6/7 = 0,8571…differisce dal valore corretto $\sqrt{3}/2$ = 0,8660… per non più dell'1%, ed era quindi una stima accettabile, all'epoca di Gerbert, per la maggior parte dei fini pratici. Ma la domanda cui ci piacerebbe maggiormente poter dare una risposta è un'altra: Gerbert conosceva il valore vero del rapporto (e quindi il teorema di Pitagora)?

Possiamo ricostruire con una certa accuratezza le conoscenze di Gerbert a partire dal fatto che il suo punto di partenza è l'analisi di un triangolo in cui il rapporto tra altezza e base è 26/30 (= 0,8667…).

Non soltanto merita notare che il rapporto 13/15 differisce dal valore esatto per meno di una parte su mille, ma ancor più interessante è il fatto che la terna 15-26-30 è la prima terna di interi maggiori di 10, di cui il minore è la metà del maggiore, che viola la relazione pitagorica di una sola unità:

$$26*26 + 15*15 = 30*30 + 1$$

Si noti che $\sqrt{3}$ è irrazionale, quindi non esistono terne esattamente pitagoriche del tipo indicato, e 26/30 è senza dubbio la miglior approssimazione razionale ottenibile con numeri "piccoli": un miglioramento si otterrebbe soltanto con la terna 41-71-82, in quanto 71/82 =0,8659…, ma certamente i numeri in gioco, anche se interi, sono del tutto inadatti a calcoli pratici e mnemonici.

Ma anche a prescindere da queste considerazioni è evidente che Gerbert voleva fornire una regola basata su numeri di una sola cifra (*in minoribus numeris libet exemplificare*), e non v'è dubbio che con questa restrizione 6/7 è la migliore scelta, in quanto 7/8 = 0,875 è più distante di 6/7 dal valore esatto, seppure soltanto per una parte su diecimila.