Compitino 1 di Meccanica Quantistica (A-B)

Novembre 2018 - Università di Pisa

(tempo a disposizione: 2 ore)

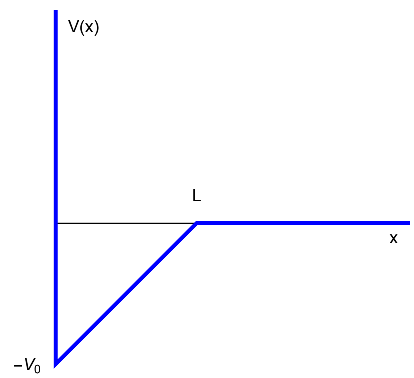
Problema 1

Un neutrone di bassa energia, $E = 5$ MeV viene inviato contro un nucleo. L'interfaccia neutrone–nucleo viene schematizzata come un gradino di profondità $-V_0 = -50$ MeV. Qual è la probabilità che il neutrone venga riflesso, cioè non penetri nel nucleo?
Nota: $\sqrt{11} \simeq 3.317$.

Problema 2

Una particella di massa m è sottoposta ad un potenziale tipo "buca triangolare" della forma

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 \left(1 - \dfrac{x}{L}\right) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases}$$



Numericamente si ha uno stato legato per (circa)

$$V_0 > 0.397 \, \frac{\pi^2 \hbar^2}{m L^2} \tag{1.1}$$

1) Usando come potenziale di confronto una (semi-)buca di potenziale si stimi, per dato L, la profondità minima V_0 per ammettere uno stato legato.

2) Si usi la regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld per dare una analoga stima.
NOTA: Si ricordi che l'energia dello stato fondamentale per la buca illustrata nella figura è uguale all'energia del primo stato eccitato della buca simmetrizzata nella regione $x < 0$.

Soluzione problema 1

L'interfaccia è posta in $x = 0$ (scelta delle coordinate).

Chiamando k il numero d'onda della particella entrante e q il numero d'onda della particella penetrata nel nucleo

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2\,; \qquad E + V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}q^2$$

La soluzione che descrive il processo d'urto è

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{per} \quad x < 0 \\ T\,e^{iqx} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Le condizioni di raccordo per ψ e ψ'/ψ sono

$$1 + R = T\,; \qquad ik\frac{1-R}{1+R} = iq$$

da cui

$$R = \frac{k-q}{k+q}\,; \qquad T = 1 + R = \frac{2k}{k+q}$$

In termini delle energie

$$|R| = \frac{q/k - 1}{q/k + 1} = \frac{\left(\frac{E+V_0}{E}\right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{E+V_0}{E}\right)^{1/2} + 1} = \frac{(1 + (V_0/E))^{1/2} - 1}{(1 + (V_0/E))^{1/2} + 1} = \frac{\sqrt{11} - 1}{\sqrt{11} + 1} \simeq 0.537$$

La probabilità richiesta è

$$P_R = |R|^2 \simeq 0.288$$

Quasi il 30%.

Soluzione problema 2

1) Una buca di potenziale (per $x > 0$) di profondità $V_1 = \hbar^2\gamma^2/2m$ e larghezza a, ha uno stato legato se

$$\gamma a \geq \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2mV_1}{\hbar^2}a^2 \geq \frac{\pi^2}{4}$$

Se iscriviamo una buca di larghezza a nel potenziale

$$V(x) = -V_0(1 - \frac{x}{L})$$

deve essere

$$V_1 = V_0(1 - \frac{a}{L})$$

e quindi il sistema ha sicuramente uno stato legato se

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2(1-\frac{a}{L}) \geq \frac{\pi^2}{4} \tag{1.3}$$

Il massimo della espressione a sinistra si ha per

$$\frac{d}{da}\left(a^2(1-\frac{a}{L})\right) = 0 \ \Rightarrow \ a = \frac{2}{3}L$$

inserendo questo valore nella (1.3)

$$V_0 \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2}\frac{\pi^2}{4}\frac{27}{4} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\frac{27}{16} \simeq 0.84\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$

2) L'impulso nella zona classicamente permessa è ($|\varepsilon = -|E|$)

$$\begin{aligned} p(x) = \sqrt{2m(E-V(x))} = \sqrt{2m(E+V_0(1-\frac{x}{L}))} &= \sqrt{2mV_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{V_0}-\frac{x}{L}} \\ &= \sqrt{2m(V_0-\varepsilon)}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\,. \end{aligned}$$

dove

$$a = L(1-\frac{\varepsilon}{V_0})$$

è il punto di inversione. La condizione di quantizzazione, tenendo conto che una delle pareti è verticale, si scrive

$$\int_0^a p(x)dx = (n+\frac{3}{4})\pi\hbar \tag{1.4}$$

Usando

$$\int_0^a \sqrt{1-\frac{x}{a}}\,dx \ = \frac{2}{3}a$$

per lo stato fondamentale ($n = 0$) si ha

$$\frac{3}{4}\pi\hbar = \sqrt{2m(V_0-\varepsilon)}\frac{2}{3}L(1-\frac{\varepsilon}{V_0}) \ \Rightarrow \ (1-\frac{\varepsilon}{V_0})^{3/2} = \frac{9}{8}\pi\hbar\frac{1}{L\sqrt{2mV_0}} = \frac{9}{8}\sqrt{\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\frac{1}{V_0}}$$

Siccome deve essere $\varepsilon > 0$ segue il requisito

$$\frac{9}{8}\sqrt{\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\frac{1}{V_0}} < 1\,; \Rightarrow \ V_0 > \frac{81}{64}\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 0.63\,\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$