Compitino 2 di Meccanica Quantistica (A-B)

16 Gennaio 2019 - Università di Pisa

(tempo a disposizione: 2 ore)

Problema 1

Un atomo di idrogeno nel primo livello eccitato ($n = 2$) è sottoposto ad un potenziale elettrostatico esterno

$$V = \frac{V_0}{a^2}(2z^2 - x^2 - y^2)$$

a è il raggio di Bohr.

1) Scrivere se e come si disintegra il livello energetico (cioè scrivere gli autovalori dell'Hamiltoniana) all'ordine più basso in teoria perturbativa.

2) Rimane una degenerazione residua? In caso affermativo c'è una qualche simmetria che spiega la degenerazione residua?

Problema 2

Una particella di massa m e carica e è libera di muoversi su una sfera di raggio a. L'Hamiltoniana può essere assunta nella forma

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\mathbf{L}^2 \equiv A\mathbf{L}^2 \tag{1.1}$$

1) Scrivere i primi due livelli energetici e la loro degenerazione.

Il sistema è sottoposto ad un campo magnetico esterno $\mathbf{B}$ diretto lungo l'asse z, cioè ad una energia potenziale esterna

$$V_B = -\mu B L_z \,; \qquad \mu > 0$$

2) Mostrare che per $\mu B = 2A$ lo stato fondamentale è degenere, scrivere l'energia e gli autostati.

Al sistema, con $\mu B = 2A$, viene aggiunto un campo elettrico lungo x, cioè un'energia potenziale

$$V_E = -e\mathcal{E}x = -ea\mathcal{E}\,\sin\theta\cos\varphi$$

3) Cosa succede al livello fondamentale? (Dire se si ha o no una disintegrazione del livello).

4) Discutere brevemente se l'Hamiltoniana $H_0 + V_B$ è invariante sotto parità ed alla luce di questo commentare il risultato ottenuto al punto 3).

5) La risposta al punto 3) cambierebbe se il campo elettrico fosse diretto lungo z?

Formule utili

Funzioni d'onda radiai per l'atomo di idrogeno

$$R_{1s} = a^{-\frac{3}{2}}\ 2\,e^{-r/a}\,; \qquad \begin{cases} R_{2s} = a^{-\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\frac{r}{2a})e^{-\frac{r}{2a}}\,; \\ R_{2p} = a^{-\frac{3}{2}}\ \frac{1}{2\sqrt{6}}\ \frac{r}{a}e^{-\frac{r}{2a}} \end{cases}$$

Tabella dele prime armoniche sferiche

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\,\cos\theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1), \quad Y_{2,\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\,\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \quad Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}\,.$$

Integrali angolari

$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega \begin{cases} \sin^2\theta &= \frac{2}{3} \\ \cos^2\theta &= \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \frac{1}{4\pi}\int d\Omega \begin{cases} \sin^4\theta &= \frac{8}{15} \\ \cos^4\theta &= \frac{1}{5} \end{cases}$$

Soluzione problema 1

1) Il livello imperturbato, $n = 2$ ‘e quattro volte degenere, contiene uno stato con $\ell = 0$ (stato s) e 3 stati con $\ell = 1$ (stati p).

Il potenziale, in coordinate radiali, di scrive

$$V = \frac{V_0}{a^2} r^2 (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{V_0}{a^2} r^2 (3\cos^2\theta - 1)$$

è cioè proporzionale all'armonica sferica Y_{20}, ovvero ‘e un tensore di tipo $T_0^{(2)}$. Il potenziale è invariante per rotazoni attorno all'asse z, per questo motivo (o equivalentemente per il teorema di W.E.) può connettere solo stati con lo stesso L_z. Sia per l'invarianza sotto parità, sia per il teo. di W.E. non ci possono essere elementi di matrice fra stati s e stati p. Per simmetria, o di nuovo per il teo. di W.E. l'elemento di matrice $\langle 2s|V|2s\rangle$ è nullo.

V è quindi diagonale nella usuale base delle autofunzioni dell'atomo di idrogeno. Indicando con A l'integrale sulla parte radiale delle funzioni d'onda

$$A = \int_0^\infty r^2 dr R_{21}^2(r) \frac{V_0}{a^2} r^2 = 30 V_0$$

Si ha, per gli stati $|n, \ell, m\rangle$

$$\langle 2,1,\pm 1|V|2,1,\pm 1\rangle = A \int d\Omega |Y_{1,\pm 1}|^2 (3\cos^2\theta - 1) = -\frac{2}{5}A$$

$$\langle 2,1,0|V|2,1,0\rangle = A \int d\Omega |Y_{1,0}|^2 (3\cos^2\theta - 1) = \frac{4}{5}A$$

Lo spettro finale è quindi

$$E_{2s} = -\frac{1}{8}\frac{e^2}{a}\,; \quad E_{2p,\pm 1} = -\frac{1}{8}\frac{e^2}{a} - \frac{2}{5}A\,; \quad E_{2p,0} = -\frac{1}{8}\frac{e^2}{a} + \frac{4}{5}A$$

2) I livelli con $L_z = \pm 1$ restano degeneri. In effetti, ad esempio, la trasformazione I_x, che cambia $x \to -x$, commuta con l'Hamiltoniana ma scambia tra loro gli stati con L_z opposti, qui $L_z = \pm 1$, che quindi restano degeneri. Notiamo che sempre per simmetria la traccia degli spostamenti in energia deve essere nulla, come in effetti accade.

Soluzione problema 2

1) I primi due livelli energetici corrispondono a $L = 0, 1$ ed hanno energia

$$E_L = AL(L+1) \to 0, 2A$$

la degenerazione è $2L + 1$, quindi nel caso particolare $0, 3$.

2) $\mathbf{L}^2, L_z$ commutano con la nuova Hamltoniana, quindi gli autostati dell'energia sono sempre della forma $|L, L_z\rangle$. In generale il minimo per ogni L si ha quando $L_z = L$, essendo $\mu > 0$ e le corrispettive energie sono

$$\mathcal{E}(L) = AL(L+1) - \mu BL$$

Lo stato di energia più bassa si ottiene per la soluzione intera più vicina a

$$\frac{\partial \mathcal{E}(L)}{\partial L} = 0$$

Nel caso $\mu B = 2A$

$$\mathcal{E}(L) = A(L^2 - L)$$

che si azzera in $L = 0, L = 1$, si vede subito che per $L > 1$ gli stati hanno energia maggiore.

In conclusione per $\mu B = 2A$ lo stato fondamentale ha energia nulla ed è degenere due volte, gli autostati sono

$$|0,0\rangle, |1,1\rangle \tag{1.2}$$

3) Il potenziale non ha elementi di matrice diagonale (ad esempio per parità) ma ha un elemento di matrice fuori diagonale

$$\langle 0,0|V_E|1,1\rangle = \int d\Omega Y_{00} V_E Y_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{6}} e\mathcal{E}a$$

ovviamente $\langle 0,0|V_E|1,1\rangle = \langle 1,1|V_E|0,0\rangle$ Si hanno quindi due livelli

$$E = +\frac{1}{\sqrt{6}} e\mathcal{E}a\,; \quad \text{autostato: } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{00} + Y_{11}\right)$$
$$E = -\frac{1}{\sqrt{6}} e\mathcal{E}a\,; \quad \text{autostato: } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{00} - Y_{11}\right)$$

Si ha cioè un effeto Stark *lineare*.

4) L'Hamiltoniana $H_0 + V_B$ è invariante sotto parità quindi non si ha, in generale, un effetto Stark lineare, a meno di degenerazioni accidentali. È il caso dell'atomo di idrogeno ed è il caso in questo problema, per il particolare valore $\mu B = 2A$.

5) Il potenziale $-\mathcal{E}ez$ commuta con L_z quindi non ha elementi di matrice fra stati con L_z diverso, quindi non si avrebbe nessun effetto Stark lineare. La cosa si verifica anche immediatamente effettuando l'integrale

$$\langle 0,0|(-ea\mathcal{E}\cos\theta|1,1\rangle = 0$$