FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2013?14
Sessione invernale - Primo appello
Lunedì 20 gennaio 2014 - ore 9

SOLUZIONI
Problema 1

1) L'accelerazione tangenziale si ricava dalla proiezione del vettore accelerazione nella direzione del vettore velocitá, che vale $\mathbf{v} = (v_0,\, -g\,t)$.

Risulta quindi $\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = g^2 t$, da cui si ricava

$$\mathbf{a}_t = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v} = \frac{g^2 t}{v_0^2 + g^2 t^2}(v_0,\, -g\,t).$$

Il modulo dell'accelerazione tangenziale vale

$$|\mathbf{a}_t| = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

2) L'accelerazione centripeta si ottiene dalla relazione $\mathbf{a}_c = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t$, da cui

$$\mathbf{a}_c = -\frac{v_0 g}{v_0^2 + g^2 t^2}(g\,t,\, v_0),$$

ed é immediato verificare l'ortogonalitá con il vettore velocitá.

Il modulo dell'accelerazione centripeta vale

$$|\mathbf{a}_c| = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

3) Il raggio istantaneo di curvatura si ricava dalla relazione $\rho = \frac{v^2}{|\mathbf{a}_c|}$ da cui subito

$$\rho = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g}.$$

3) (facoltativo) Occorre innanzitutto calcolare il modulo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$; dal calcolo si ottiene

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(v_0 t)^2 + \frac{1}{4}(\frac{v_0^2}{g} - g\,t^2)^2} = \frac{v^2}{2\,g}.$$

Bisogna quindi dimostrare che

$$\frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}.$$

Si verifica facilmente che entrambe le espressioni hanno il valore $g\,t$ e pertanto la tesi é dimostrata.

Problema 2

1) L'equilibrio delle forze gravitazionali é determinato dalla relazione

$$\frac{G\,M_T}{X^2} = \frac{G\,M_L}{(D-X)^2},$$

da cui anche $\sqrt{M_T}(D-X) = \sqrt{M_L}X$, e risolvendo

$$X = \frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L}}D, \qquad D-X = \frac{\sqrt{M_L}}{\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L}}D.$$

2) Per la conservazione dell'energia (per unitá di massa della navicella) E deve valere in ogni istante

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{G\,M_T}{R} - \frac{G\,M_L}{D-R} = -\frac{G\,M_T}{X} - \frac{G\,M_L}{D-X} = -\frac{G}{D}(\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L})^2,$$

dove abbiamo assunto che al punto morto la velocitá sia nulla e sostituito il valore di X trovato in precedenza.

Vale quindi, al momento della partenza da Terra della navicella

$$\frac{1}{2}v_T^2 = \frac{G\,M_T}{R_T} + \frac{G\,M_L}{D-R_T} - \frac{G}{D}(\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L})^2.$$

3) In perfetta analogia con il caso precedente, si ricava immediatamente

$$\frac{1}{2}v_L^2 = \frac{G\,M_T}{D-R_L} + \frac{G\,M_L}{R_L} - \frac{G}{D}(\sqrt{M_T}+\sqrt{M_L})^2.$$

Problema 3

1) L'entropia puó essere calcolata direttamente dalla relazione $T\,dS = dU + p\,dV$ notando che vale

$$dU + p\,dV = \frac{3}{2}n\,R\,dT + (a\frac{n^2}{V^2} + p)\,dV,$$

da cui subito, usando l'equazione di stato

$$dS = \frac{3}{2}n\,R\,\frac{dT}{T} + n\,R\frac{dV}{V-n\,b},$$

e a meno di costanti d'integrazione

$$S = \frac{3}{2}n\,R\,\ln(T) + n\,R\,\ln(\frac{V}{n} - b).$$

2) L'equazione per le adiabatiche reversibili é semplicemente l'equazione per le trasformazioni isoentropiche, ossia la condizione che S resti costante. Nel caso specifico tale relazione puó assumere le forme

$$T^{\frac{3}{2}}(V-n\,b) = const, \qquad (p + a\frac{n^2}{V^2})(V-n\,b)^\gamma = const'.$$

3) Dalla definizione $F = U - T\,S$ segue immediatamente

$$F(T,V) = \frac{3}{2}n\,R(T - T\ln T) - n\,R\,T\ln(\frac{V}{n} - b) - a\frac{n^2}{V}.$$