FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione invernale - Primo appello
Venerdì 23 gennaio 2015 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Trattandosi di una collisione completamente anelastica, non vale la conservazione dell'energia ma soltanto la conservazione della quantità di moto, che nel caso in esame è espressa dalla relazione

$$m\, v_0 = (M + m)\, v_1$$

in quanto dopo la collisione i due corpi restano uniti.

Di conseguenza si ricava immediatamente che

$$v_1 = \frac{m\, v_0}{M + m}.$$

2) Per la conservazione dell'energia meccanica totale, confrontando la situazione subito dopo la collisione con la situazione all'angolo massimo (quando l'energia cinetica si annulla) possiamo ricavare

$$\frac{1}{2}(M + m)\, v_1^2 \equiv \frac{1}{2}\frac{(m\, v_0)^2}{M + m} = (M + m)\, g\, L\, (1 - \cos\theta_0),$$

da cui subito

$$v_0 = \Big(\frac{M}{m} + 1\Big)\sqrt{2\, g\, L\, (1 - \cos\theta_0)}.$$

3) Poiché la massima elongazione consentita corrisponde a $\cos\theta_0 = 0$, le velocità misurabili con questo strumento devono soddisfare la relazione

$$v_0 \leq \Big(\frac{M}{m} + 1\Big)\sqrt{2\, g\, L}.$$

Problema 2

1) Il caso dell'orbita parabolica corrisponde alla condizione per cui l'energia meccanica totale è esattamente uguale a zero:

$$\frac{1}{2}m\, v_0^2 - \frac{G\, M\, m}{r_0} = 0.$$

Di conseguenza è immediato ricavare

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{r_0}}.$$

2) Usando coordinate polari ed esprimendo la componente angolare della velocità in termini del momento angolare grazie alla relazione $L = m\,r^2\,\dot\theta$ possiamo riscrivere l'espressione dell'energia per il moto parabolico nella forma

$$\frac{1}{2} m\,\dot r^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m\,r^2} - \frac{G\,M\,m}{r} = 0.$$

Imponendo l'annullamento della componente radiale della velocità otteniamo quindi

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{m\,r_m^2} - \frac{G\,M\,m}{r_m} = 0,$$

da cui subito

$$r_m = \frac{1}{2\,G\,M}\Big(\frac{L}{m}\Big)^2.$$

3) Ricordando che vale in generale $L = m\,r_0\,v_0\,\sin\theta_0$ e richiamando i risultati precedenti possiamo eliminare L/m dall'espressione di r_m ottenendo in conclusione

$$r_m = r_0 \sin^2\theta_0.$$

Problema 3

1) Poiché per i tratti adiabatici conosciamo le temperature iniziali e finali e uno dei volumi, possiamo ricavare i volumi non noti utilizzando il fatto che lungo un'adiabatica resta costante la combinazione $T\,V^{\gamma-1}$. Risulta quindi immediatamente

$$V_B = \Big(\frac{T_C}{T_A}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_C, \qquad V_D = \Big(\frac{T_A}{T_C}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A.$$

Si noti che un'immediata conseguenza del risultato ottenuto è la relazione

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_C}{V_A}\Big(\frac{T_C}{T_A}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

2) Utilizzando l'equazione di stato $p\,V = R\,T$ lungo le isoterme otteniamo facilmente

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_A}\Big(\frac{T_C}{T_A}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad \frac{p_D}{p_C} = \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_C}{V_A}\Big(\frac{T_C}{T_A}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

da cui anche la relazione $p_A/p_B = p_D/p_C$.

3) Poiché lungo le isoterme non cambia l'energia interna possiamo calcolare facilmente il calore scambiato dalla relazione $Q_{if} = \int p\,dV = R\,T\,\ln(V_f/V_i)$, e ricavare il lavoro totale W dalla relazione $W = Q_{AB} + Q_{CD}$ ottenendo

$$W = R\,T_A\,\ln(V_B/V_A) - R\,T_C\,\ln(V_C/V_D) = R\,(T_A - T_C)\Big[\ln(V_C/V_A) - \frac{1}{\gamma-1}\ln(T_A/T_C)\Big].$$