FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2013/14
Sessione invernale - Secondo appello
Lunedì 17 febbraio 2014 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Detta s la coordinata lungo il piano inclinato (misurata a partire dalla base), finché la massa si trova sul piano la sua equazione del moto è

$$\ddot{s} = \frac{K}{m}(l_0 - s) - g \sin\alpha.$$

Se per $s = 0$ la forza è negativa la massa non si può muovere, quindi la condizione per l'espansione della molla è

$$K\, l_0 > m\, g\, \sin\alpha.$$

2) Quando la massa raggiunge la cima del piano inclinato la sua energia vale

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{s}^2 + m\,g\,l_0 \sin\alpha = \frac{1}{2}K\,l_0^2,$$

dove abbiamo fatto uso della condizione iniziale $s = 0$, $\dot{s} = 0$. Deve quindi valere:

$$\dot{s}^2 = \frac{K}{m}l_0^2 - 2\,g\,l_0 \sin\alpha > 0,$$

da cui subito la condizione

$$K\, l_0 > 2\,m\,g\, \sin\alpha.$$

3) La risposta è implicita nella risposta alla domanda precedente, in quanto per la conservazione dell'energia risulta

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{m}l_0^2 - 2\,g\,l_0 \sin\alpha}.$$

4) La legge oraria nella direzione verticale y dopo il momento del distacco ($t = 0$) è

$$y = l_0 \sin\alpha + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}g\,t^2.$$

Dalla condizione $\dot{y}_M = v_0 \sin\alpha - g\,t_M = 0$ si trova $t_M = v_0 \sin\alpha/g$ da cui sostituendo:

$$y_M = l_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha,$$

e vale, come prevedibile dalla conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}m\,v_0^2 \cos^2\alpha + m\,g\,y_M = \frac{1}{2}K\,l_0^2.$$

5) La legge oraria del moto nella direzione x (orizzontale) è

$$x = l_0 \cos\alpha + v_0 \cos\alpha\, t.$$

L'istante t_D in cui la massa raggiunge il piano si ricava dalla condizione $y_D = 0$:

$$l_0 \sin\alpha + v_0 \sin\alpha\, t_D - \frac{1}{2} g\, t_D^2 = 0,$$

da cui

$$t_D = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big(1 + \sqrt{1 + \frac{2\, g\, l_0}{v_0^2 \sin\alpha}}\Big).$$

La distanza raggiunta si ottiene per sostituzione nella legge oraria lungo x:

$$x_D = (l_0 + v_0 t_D)\cos\alpha.$$

Problema 2

1) Dalle definizioni risulta banalmente

$$E = \frac{1}{2} m\, v_0^2, \qquad\qquad L = m\, v_0\, b.$$

2) L'equazione della traiettoria (iperbolica) in coordinate polari è

$$r = \frac{p}{1 + e\, \cos\phi},$$

dove

$$p = \frac{L^2}{G\, M\, m^2} = \frac{v_0^2 b^2}{G\, M}, \qquad\qquad e = \sqrt{1 + \frac{2\, E\, L^2}{G^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}}.$$

Di conseguenza la distanza minima dal Sole, che corrisponde alla condizione $\phi = 0$, è

$$r_m = \frac{p}{1 + \sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}}} = \sqrt{\big(\frac{GM}{v_0^2}\big)^2 + b^2} - \big(\frac{GM}{v_0^2}\big).$$

In alternativa la risposta si può ricavare dalle leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare, notando che $v_0 b = v_m r_m$ per cui

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 b^2}{r_m^2} - \frac{G\, M}{r_m}.$$

3) All'uscita dal campo gravitazionale del Sole, per la conservazione dell'energia, il modulo della velocità coinciderà con il valore iniziale v_0 e di conseguenza la distanza della retta finale dal Sole sarà nuovamente b per la conservazione del momento angolare.

I due valori per cui $r \to \infty$ sono i due angoli tali che

$$\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}}}.$$

L'angolo tra le due rette vale $\pi - 2\,\phi$ e di conseguenza si ricava

$$\cos(\pi - 2\,\phi) = \frac{p^2 - b^2}{p^2 + b^2}.$$

Problema 3

1) Nel ciclo reversibile deve valere per le trasformazioni adiabatiche

$$V_C^R = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B, \qquad V_D^R = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A.$$

Poiché nelle trasformazioni adiabatiche irreversibili l'entropia deve necessariamente aumentare le disuguaglianze richieste sono:

$$V_C > V_C^R, \qquad V_D < V_D^R.$$

2) I calori assorbito e ceduto si ricavano dalla conservazione dell'energia nelle isoterme valutando il lavoro compiuto nella trasformazione reversibile, in quanto per un gas ideale l'energia interna non varia in una trasformazione isoterma. Si ottiene cosi̇̀

$$Q_1 = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_B}{V_A}, \qquad |Q_2| = n\,R\,T_2 \ln\frac{V_C}{V_D}.$$

Il rendimento è quindi

$$\rho \equiv 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\frac{\ln\frac{V_C}{V_D}}{\ln\frac{V_B}{V_A}}.$$

3) Notando che per le disuguaglianze di cui alla risposta 1) vale necessariamente

$$\frac{V_C}{V_D} > \frac{V_C^R}{V_D^R} = \frac{V_B}{V_A}$$

segue che

$$\frac{\ln\frac{V_C}{V_D}}{\ln\frac{V_B}{V_A}} > 1$$

e di conseguenza

$$\rho < 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$