FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione invernale - Secondo appello
Venerdì 20 febbraio 2015 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Il massimo della curva è situato nel punto in cui $\frac{dy}{dx} = 0$, cioè $-3\,a\,x^2 + 2\,a\,x\,x_0 = 0$. Otteniamo quindi per le coordinate del punto di massimo i valori

$$x_M = \frac{2}{3}x_0, \qquad y_M \equiv y(x_M) = \frac{4}{27}a\,x_0^3.$$

Di conseguenza nelle ipotesi del problema, assumendo la conservazione dell'energia e la richiesta che il punto raggiunga il massimo con velocità non nulla il massimo locale della curva potrà essere superato soltanto se vale $h > y_M$ ovvero

$$h > \frac{4}{27}a\,x_0^3.$$

Si noti che per le proprietà di simmetria della curva $y(x)$ questa condizione si traduce abbastanza semplicemente in un vincolo su x_h, che deve soddisfare la relazione $x_h < -\frac{1}{3}x_0$.

2) Il modulo della velocità all'incontro con l'asse delle x è determinato dalla conservazione dell'energia $\frac{1}{2}m\,v^2 = m\,g\,h$ e vale quindi $v = \sqrt{2\,g\,h}$.

Le componenti si determinano dalla pendenza della curva, che in ogni punto vale $a\,x\,(2\,x_0 - 3\,x)$ e quindi nel punto x_0 vale $-a\,x_0^2 = \frac{v_y}{v_x}$.

Ne segue subito il risultato richiesto:

$$v_x = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{\sqrt{1 + a^2 x_0^4}}, \qquad v_y = -\frac{a\,x_0^2\sqrt{2\,g\,h}}{\sqrt{1 + a^2 x_0^4}}.$$

3) Sempre per la conservazione dell'energia, la velocità nel punto x_M vale in modulo $v_M = \sqrt{2\,g\,(h - y_M)}$, ed è diretta nel verso positivo dell'asse delle x in quanto la tangente alla curva è orizzontale.

Il moto naturalmente accelerato che ne seguirebbe è quindi descritto dalle equazioni

$$x(t) = x_M + v_M t, \qquad y(t) = y_M - \frac{1}{2}g\,t^2.$$

L'aase delle x sarebbe quindi intercettato al tempo $t_f = \sqrt{2\,y_M/g}$ e di conseguenza la posizione raggiunta sarebbe

$$x_f = x_M + v_M t_f = x_M + 2\,\sqrt{y_M(h - y_M)}.$$

Si noti che il risultato non dipende da g, ma soltanto dalla geometria della curva.

Problema 2

1) L'orbita deve soddisfare in ogni istante la conservazione dell'energia e del momento angolare. Imponendo le due leggi di conservazione all'afelio e al perielio, quando la velocità è ortogonale al raggio, si ottengono le equazioni

$$E = \frac{1}{2} m\, v_A^2 - \frac{G\, M\, m}{R_A} = \frac{1}{2} m\, v_B^2 - \frac{G\, M\, m}{R_B}.$$

$$L = m\, v_A R_A = m\, v_B R_B.$$

Considerando come incognite R_A e R_B il sistema si risolve facilmente ottenendo

$$R_A = \frac{2\, G\, M}{v_A(v_A + v_B)}, \qquad R_B = \frac{2\, G\, M}{v_B(v_A + v_B)}.$$

2) Il momento angolare della cometa si ottiene facilmente per sostituzione dei risultati precedenti nelle formule iniziali:

$$L = \frac{2\, G\, M\, m}{v_A + v_B}.$$

e quindi dipende dalla media aritmetica delle velocità all'afelio e al perielio.

3) In modo del tutto analogo si può calcolare l'energia totale, ottenendo

$$E = -\frac{1}{2} m\, v_A v_B.$$

Si noti che i risultati ottenuti sono perfettamente validi anche nel caso limite di orbita circolare per la quale vale $v_A = v_B$.

Problema 3

1) L'equazione di stato ci permette di determinare preliminarmente il numero delle moli di gas contenute nelle due parti del cilindro:

$$n_A = \frac{p_A V_0}{2\, R\, T_A}, \qquad n_B = \frac{p_B V_0}{2\, R\, T_B}.$$

Notiamo che per un gas perfetto biatomico vale in generale per l'energia interna la relazione $U = \frac{5}{2} p\, V = \frac{5}{2} n\, R\, T$ e dal primo principio consegue la conservazione dell'energia interna in quanto il sistema è termicamente isolato.

Dalla condizione di equilibrio meccanico segue quindi la relazione

$$\frac{5}{2}(p_A + p_B)\frac{V_0}{2} = \frac{5}{2} p_e (V_A + V_B) = \frac{5}{2} p_e V_0,$$

da cui banalmente si ricava

$$p_e = \frac{1}{2}(p_A + p_B).$$

Sempre partendo dalla legge di conservazione dell'energia, imponendo la condizione di equilibrio termico, otteniamo poi la relazione

$$\frac{5}{2}n_A R T_A + \frac{5}{2}n_B R T_B = \frac{5}{2}(n_A + n_B) R T_e,$$

da cui si ricava, utilizzando i risultati precedenti

$$T_e = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} = \frac{p_A + p_B}{\frac{p_A}{T_A} + \frac{p_B}{T_B}}.$$

2) Utilizzando le relazioni $p_e V_A = n_A R T_e$ e $p_e V_B = n_B R T_e$ è immediato ricavare dai risultati precedenti

$$\frac{V_A}{V_0} = \frac{p_A}{T_A}\frac{1}{\frac{p_A}{T_A} + \frac{p_B}{T_B}}, \qquad \frac{V_B}{V_0} = \frac{p_B}{T_B}\frac{1}{\frac{p_A}{T_A} + \frac{p_B}{T_B}}.$$

3) Per ciascuna delle due parti del gas la variazione di entropia può in questo caso essere espressa dalla relazione

$$\Delta S_x = \frac{7}{2}n_x R \ln\frac{T_e}{T_x} - n_x R \ln\frac{p_e}{p_x},$$

da cui combinando i risultati

$$\Delta S = \frac{V_0}{2}\Big[\frac{7}{2}\frac{p_A}{T_A}\ln\frac{T_e}{T_A} + \frac{7}{2}\frac{p_B}{T_B}\ln\frac{T_e}{T_B} - \frac{p_A}{T_A}\ln\frac{p_e}{p_A} - \frac{p_b}{T_B}\ln\frac{p_e}{p_B}.\Big]$$

Si possono sostituire in questa espressione i rusultati ottenuti in precedenza, oppure rappresentare la variazione di entropia utilizzando come variabili i numeri delle moli (ossia i volumi molari), per cui risulta anche

$$\Delta S = \frac{7}{2}R\big[n_A \ln\frac{2\,n_A}{n_A + n_B} + n_B \ln\frac{2\,n_B}{n_A + n_B}\big] + \frac{5}{2}R\big[n_A \ln\frac{p_A + p_B}{2\,p_A} + n_B \ln\frac{p_A + p_B}{2\,p_B}\big].$$